Flexión Pura

Clase 8

Flexión Pura, Tensiones Normales, Flexión Simple, Concentración de Tensiones, Energía Potencial de Deformación

Flexión Pura

1º Paso:

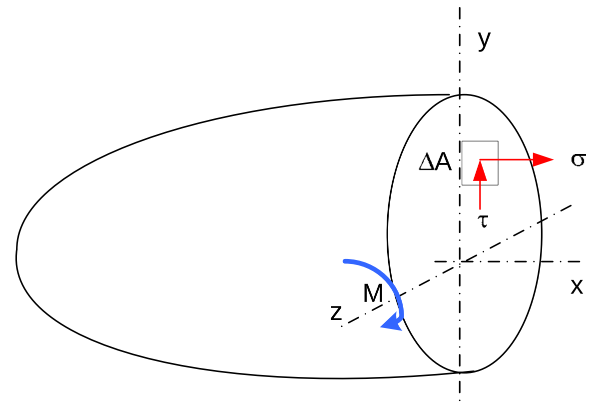
a) $df = \sigma . dA$ $\qquad dq = \tau . dA$

b)

$$\int_A \sigma dA = 0 \qquad \int_A \sigma . y . dA = M$$

$$\int_A \tau_y dA = 0 \qquad \int_A \sigma . z . dA = 0$$

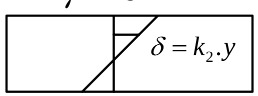
$$\int_A \tau_z dA = 0 \qquad \int_A \tau . \rho . dA = 0$$



2º Paso:

$$\varepsilon = k_1 . y \qquad \delta = k_2 . y$$

$$\gamma = 0$$



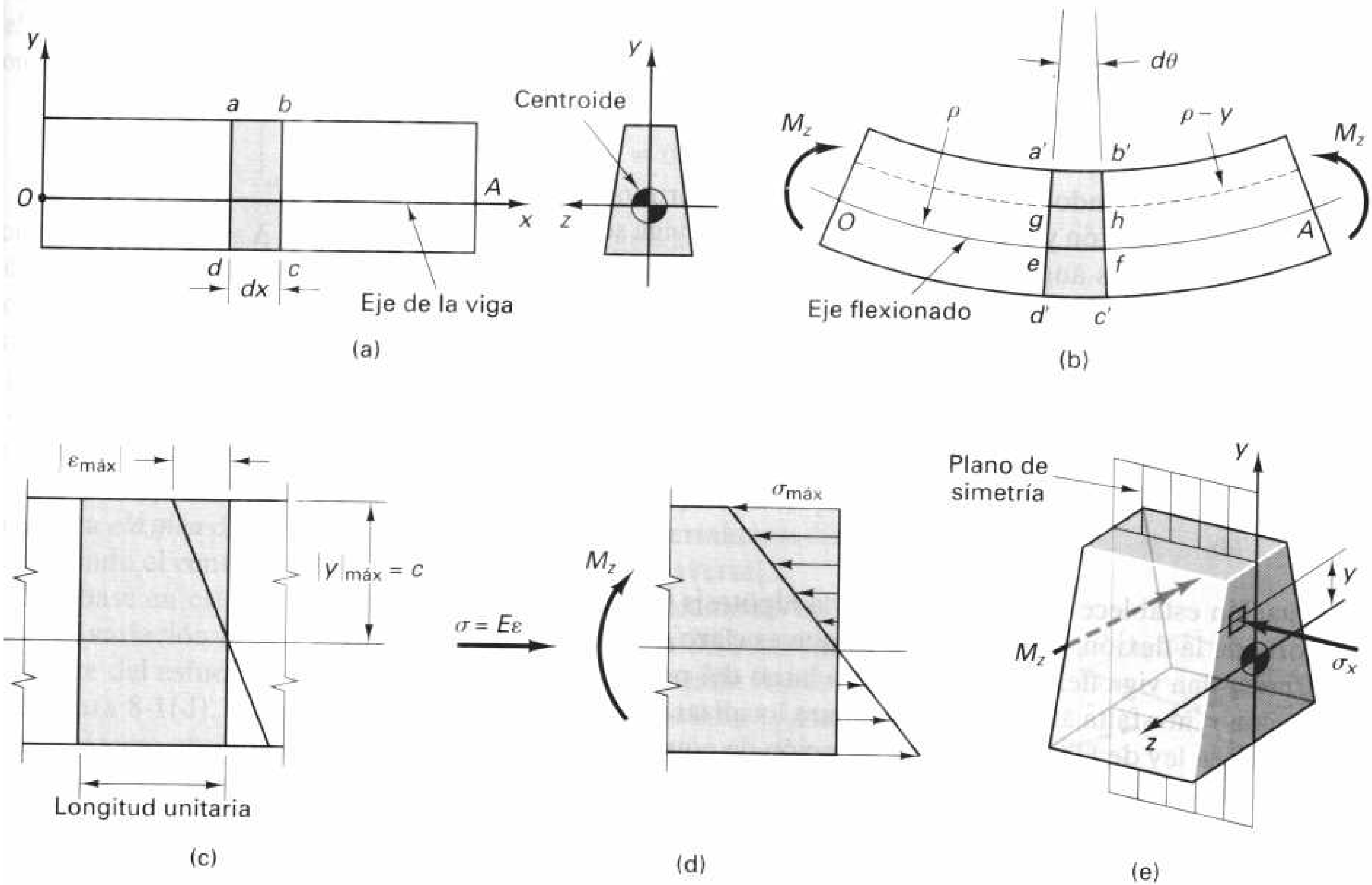
$$\varepsilon = \frac{\delta}{l}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{k_2}{l} \right) . y = k_1 . y$$

$$\sigma = E . \varepsilon = E . k_1 . y$$

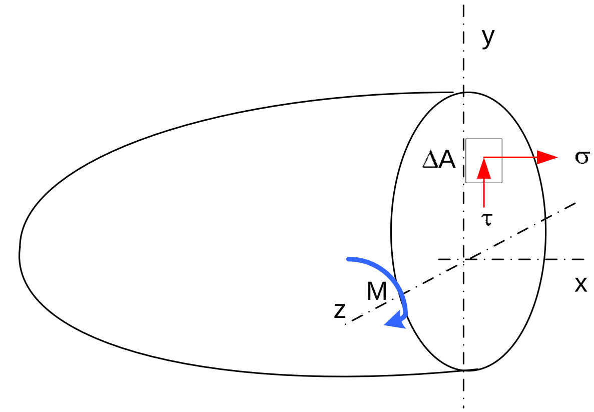
$$\therefore \sigma = k . y$$

Flexión Pura



Comportamiento supuesto de una viga elástica en flexión.

Flexión Pura



3º Paso:

$$\tau = G.\gamma = G.0 \therefore \tau = 0$$

$$\int_A \sigma dA = 0 \rightarrow \int_A k.y.dA = 0 \rightarrow k.\int_A y.dA = 0 \therefore y = 0$$

$$\int_A \sigma.z.dA = 0 \rightarrow \int_A k.y.z.dA = 0 \rightarrow k\int_A y.z.dA = 0 \therefore I_{xy} = 0$$

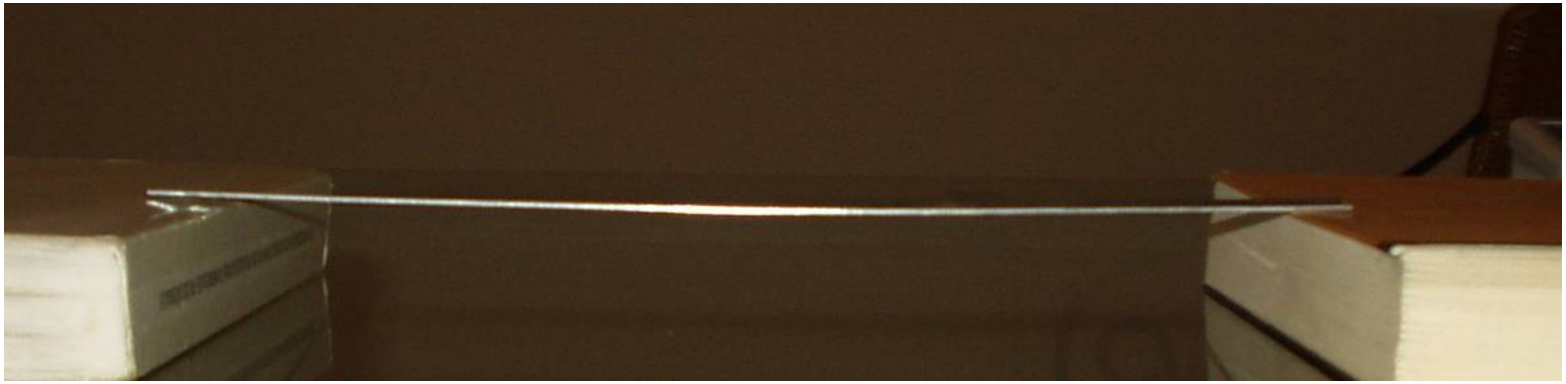
$$\int_A \sigma.y.dA = M \rightarrow \int_A k.y^2.dA = M \rightarrow k.\int_A y^2.dA = M$$

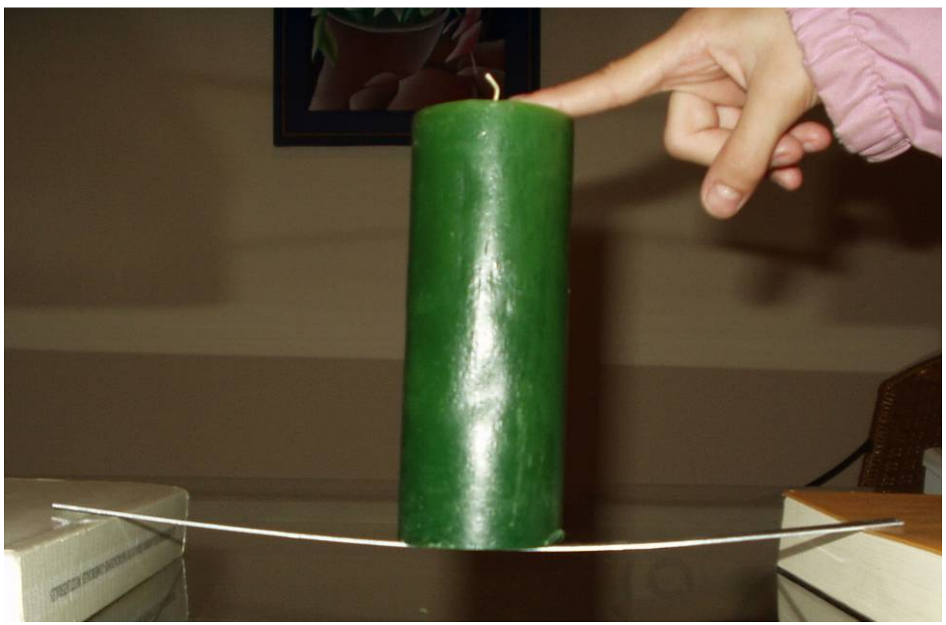
$$I_z = \int_A y^2.dA$$

$$\left(\frac{\sigma}{y}\right).I_z = M \rightarrow \sigma = \frac{M.y}{I_z}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M.y_{max}}{I_z}$$

Flexión



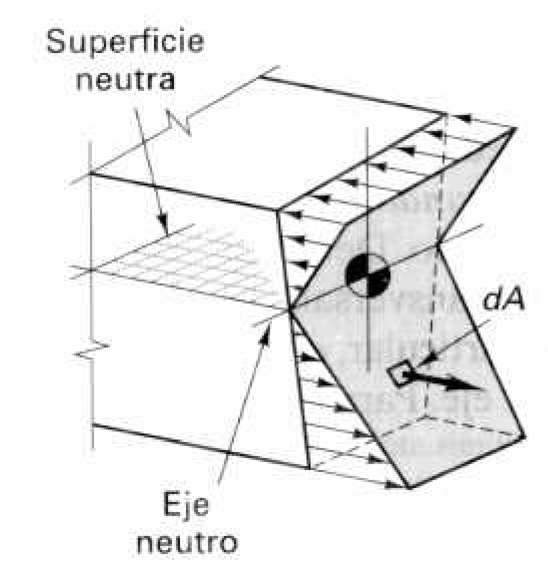


Deformación por encima del límite de proporcionalidad

Flexión Pura - **Limitaciones de la Fórmula:**

- Las cargas deben ser estáticas.
- La pieza no debe tener tensiones iniciales o residuales.
- Las dimensiones relativas de la viga deben ser tales que la viga esté solicitada a flexión como acción prepominante.
- La viga debe estar sometida a flexión pura.
- El Eje neutro debe ser perpendicular al plano de carga (este debe contener un eje principal de inercia).
- La pieza debe ser recta (o de pequeña curvatura).
- La pieza no debe tener cambio brusco de sección.
- Se debe cumplir la Ley de Hooke:
    a) Tensiones por debajo de la tensión de proporcionalidad,
    b) El módulo de Elasticidad debe ser el mismo a la tracción como a la compresión.
- El material debe ser continuo y homogéneo.
- El punto donde se halla la tensión no debe estar en las cercanías de una carga concentrada.

Flexión Pura



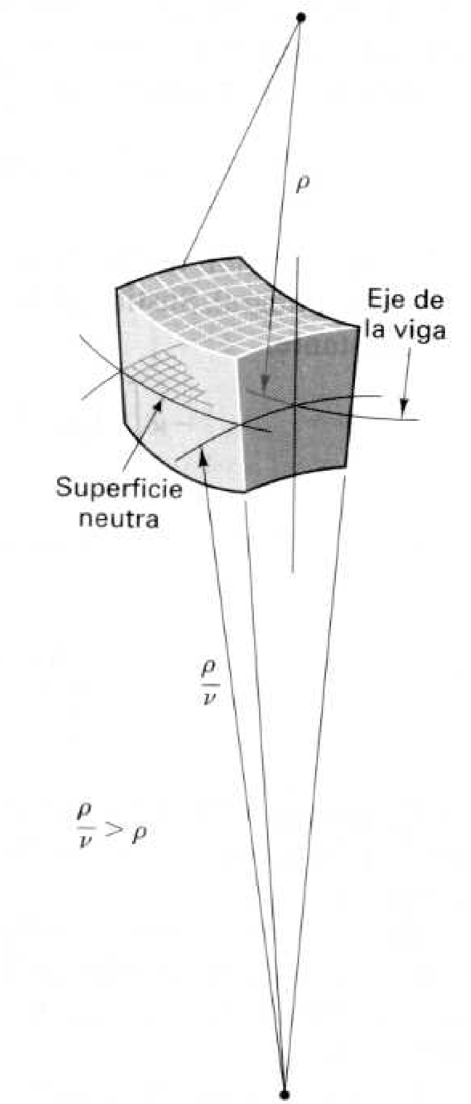


Fig. 8-6 Segmento de una viga flexionada.

Flexión Pura – Problemas Principales

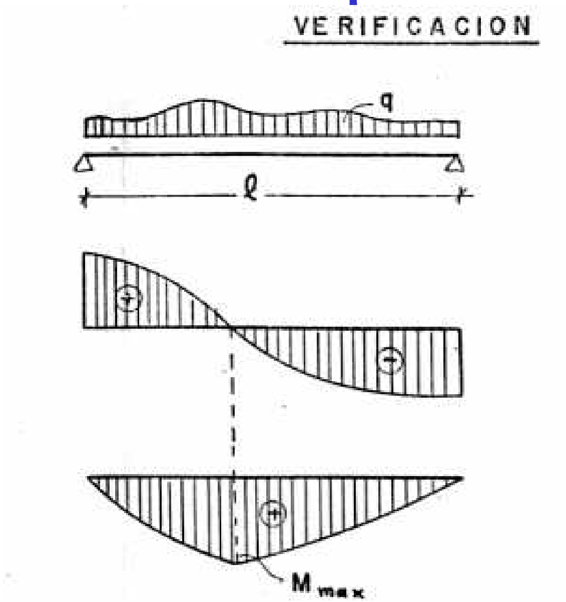
a VERIFICACION:

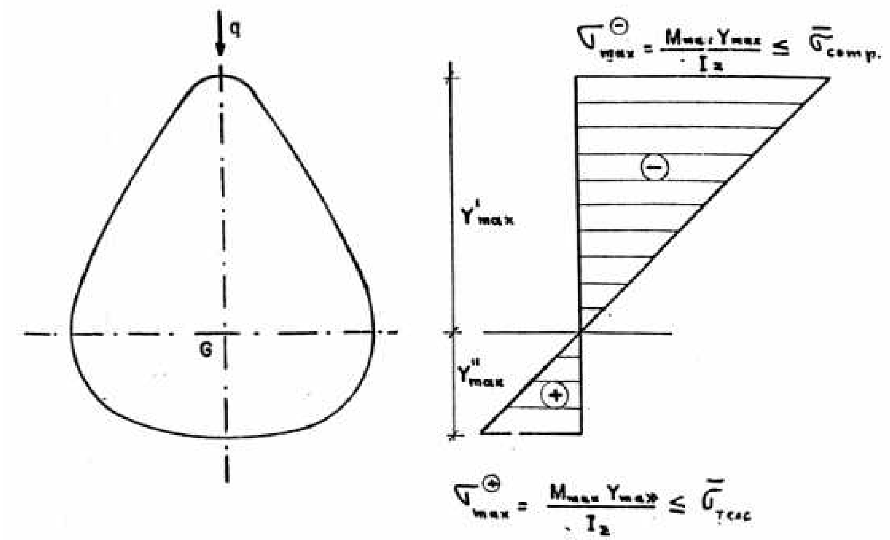
$$\sigma = \frac{M\, y_{max}}{I_z} \leq \bar{\sigma}$$

$$M_{max} = \frac{\bar{\sigma}\, I_z}{y_{max}} \leq M$$

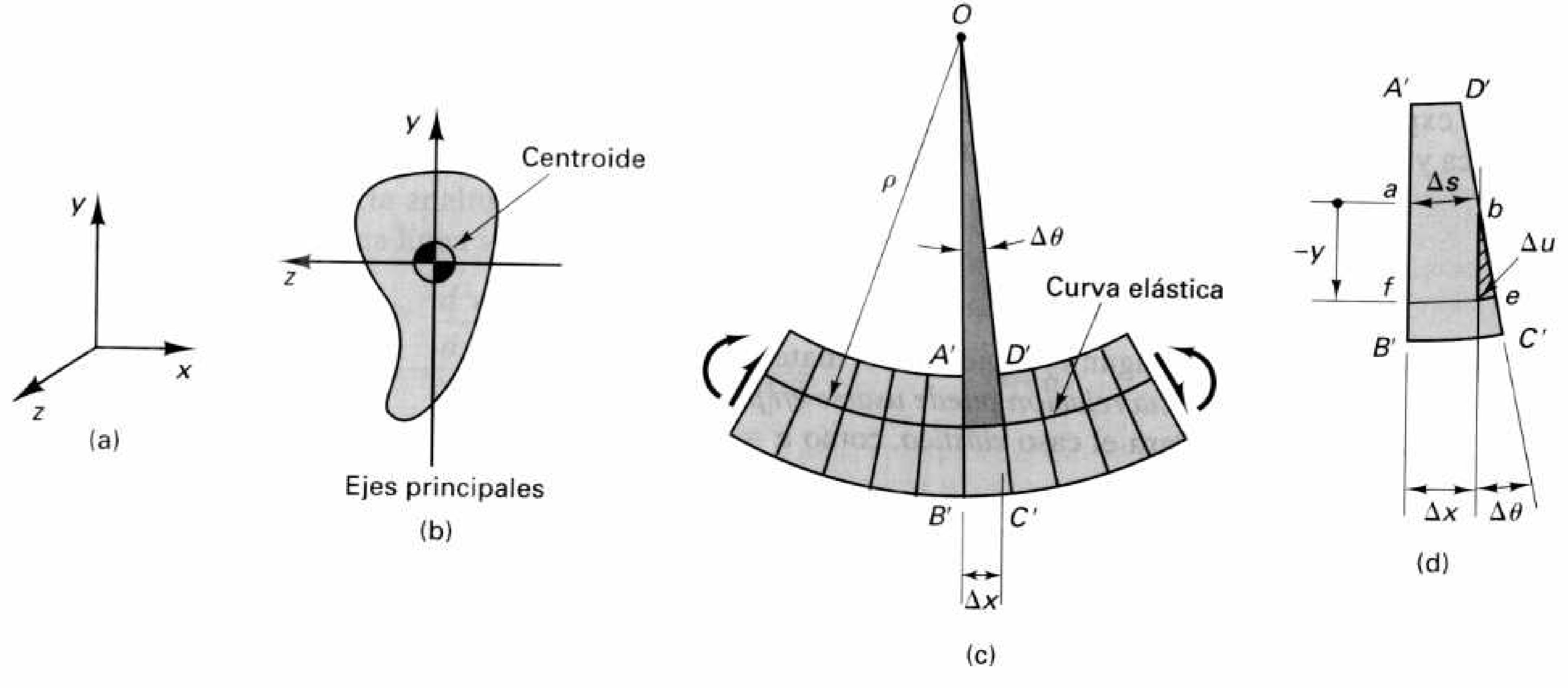
b DIMENSIONAMIENTO

$$\frac{I_z}{y_{max}} = W_z \geq \frac{M}{\bar{\sigma}}$$



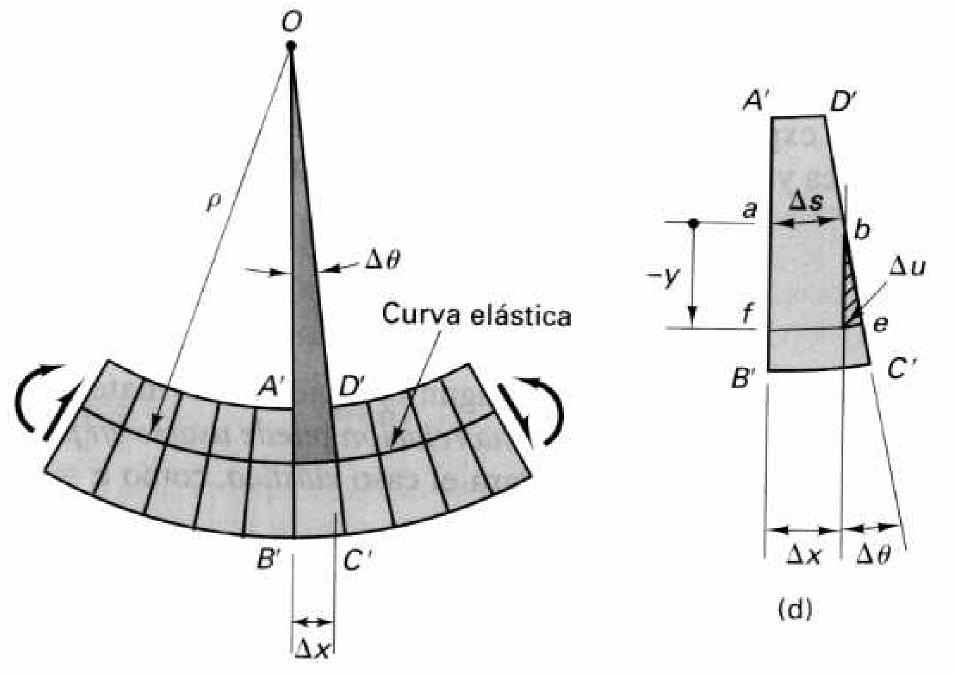


Flexión Pura – Procedimiento alternativo de deducción de la fórmula



Deformación de una viga en flexión.

Flexión Pura – Procedimiento alternativo para deducir la fórmula



$$\Delta u = -y.\Delta\theta$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \Rightarrow \frac{du}{ds} = -y\frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \kappa$$

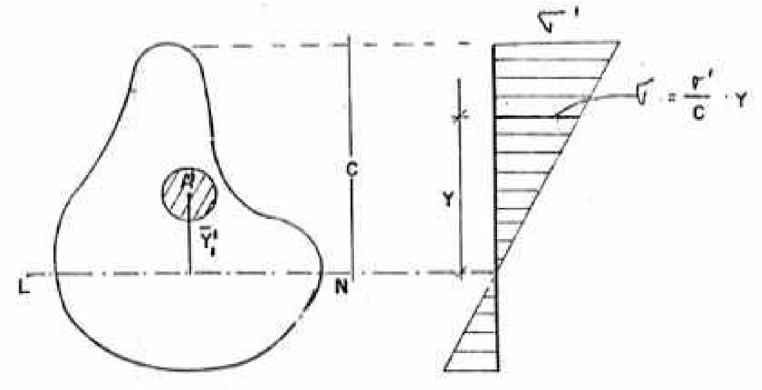
$$\frac{1}{\rho} = \kappa = -\frac{\varepsilon}{y}$$

$$\sigma = E.\varepsilon \to \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{y}{\rho} \therefore \sigma = \frac{E.y}{\rho}$$

$$\int_A \sigma.y.dA = \int_A \frac{E}{\rho}.y^2.dA = \frac{E}{\rho}.\int_A y^2.dA = \frac{E}{\rho}.I = M$$

$$\therefore \sigma = \frac{M.y}{I}$$

Flexión Pura – Calculo de la fuerza resultante en un área



$$F = \frac{\sigma'}{C} A' \bar{Y}'_1$$

$$M = F \bar{Y}'_1 = \frac{\sigma'}{C} I'$$

$$F = \frac{\sigma'}{C} \int_{A'} Y dA = \frac{\sigma'}{C} \bar{Y}'_1 . A'$$

$$\boxed{F = \frac{\sigma'}{C} \cdot \bar{Y}'_1 A'}$$

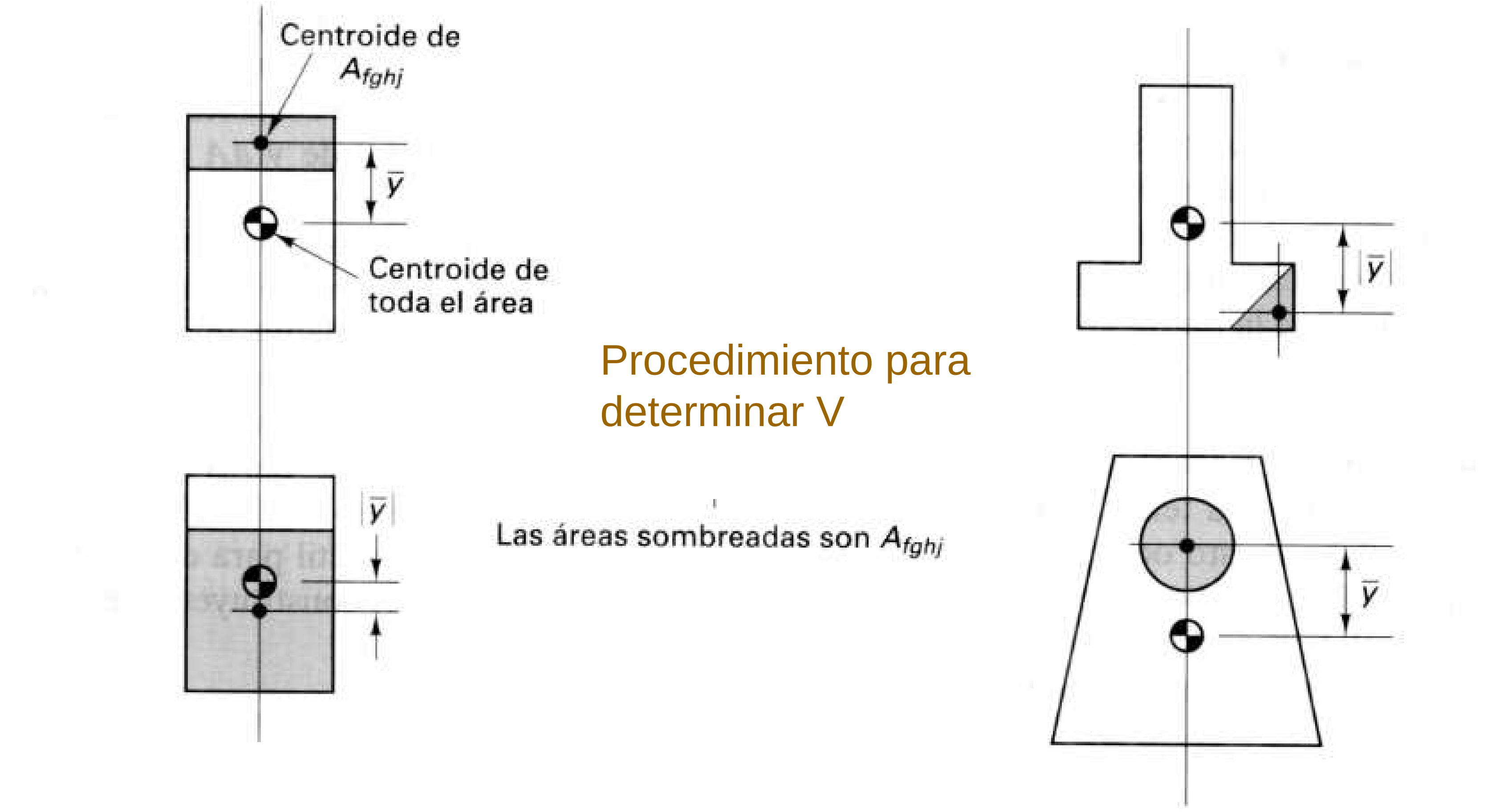
$$M = F . \bar{Y}_1 = \int_{A'} \sigma Y dA$$

$$M = \frac{\sigma'}{C} \int_{A'} Y^2 dA$$

$$M = \frac{\sigma'}{C} I'$$

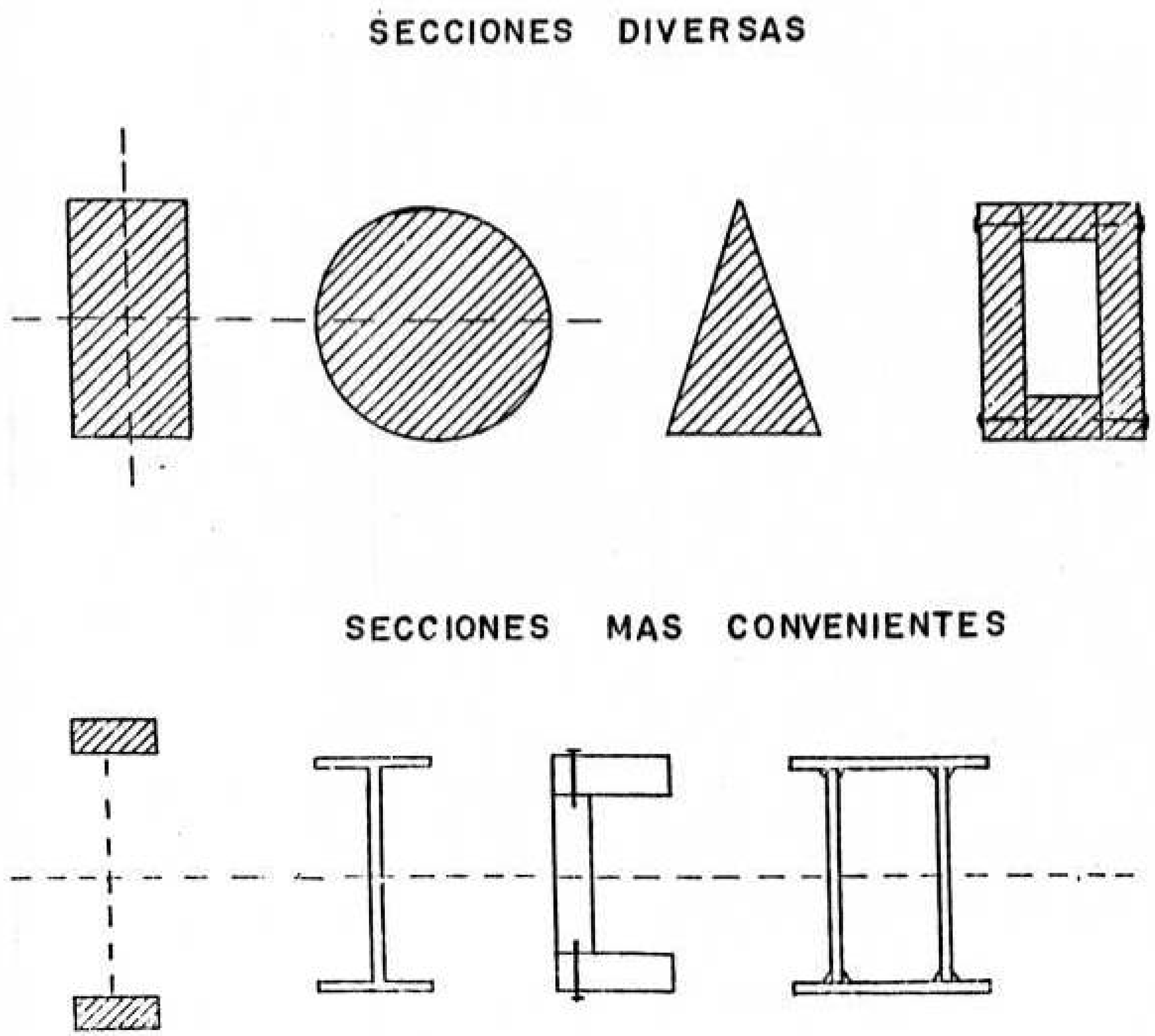
$$\boxed{M = \frac{\sigma'}{C} I'}$$

Flexión Pura – Calculo de la fuerza resultante en un área



Procedimiento para determinar V

Secciones

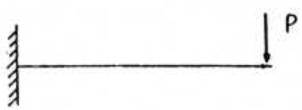


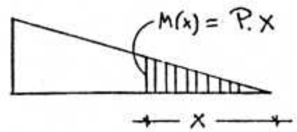
Piezas de igual resistencia

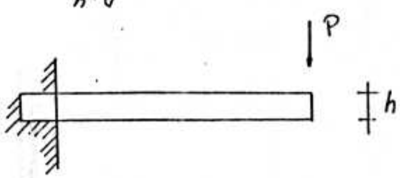
$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12}} = \frac{6M}{b h^2}$$

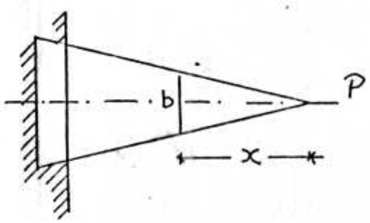
$$b = \frac{6M}{h^2 \bar{\sigma}} \qquad \underline{b = K\, M(x)}$$

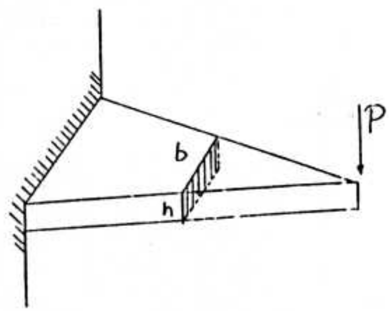
$$b = \frac{6 P x}{h^2 \bar{\sigma}}$$









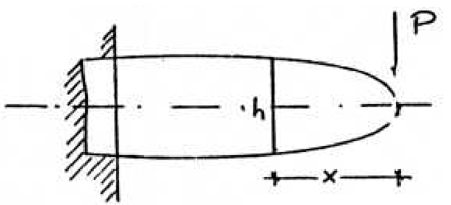


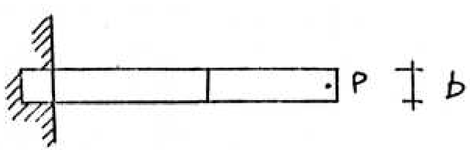
a) Sección Rectangular – b= cte

$$h = \sqrt{\frac{6\, M(x)}{b\, \bar{\sigma}}}$$

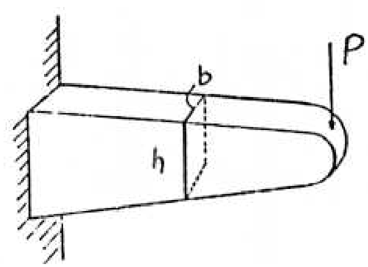
si $\quad M(x) = P x$

$$h = \sqrt{\frac{6 P x}{b\, \bar{\sigma}}}$$

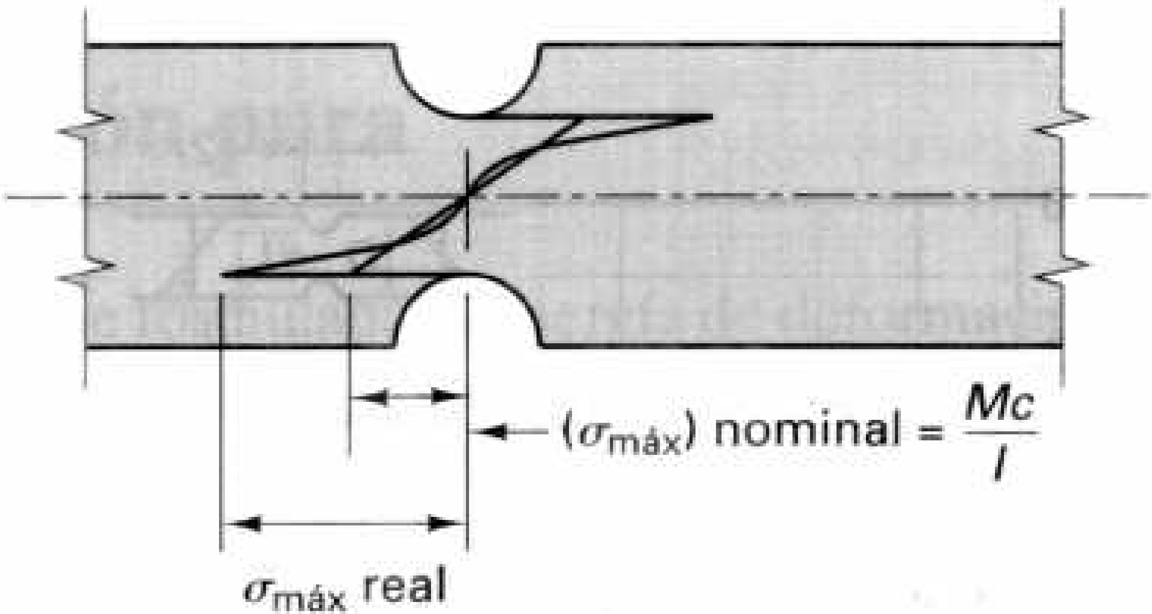




b) Idem – b= cte



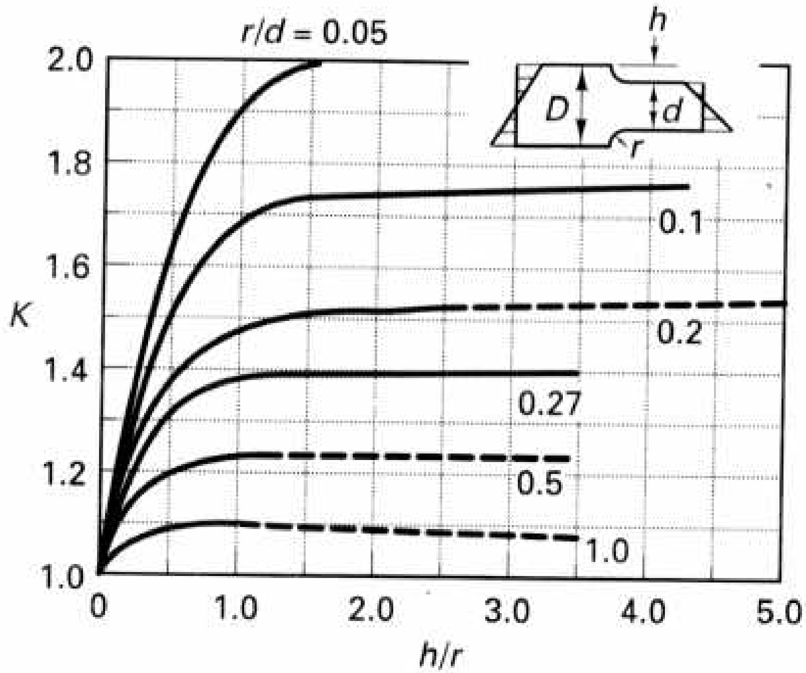
Concentración de Tensiones



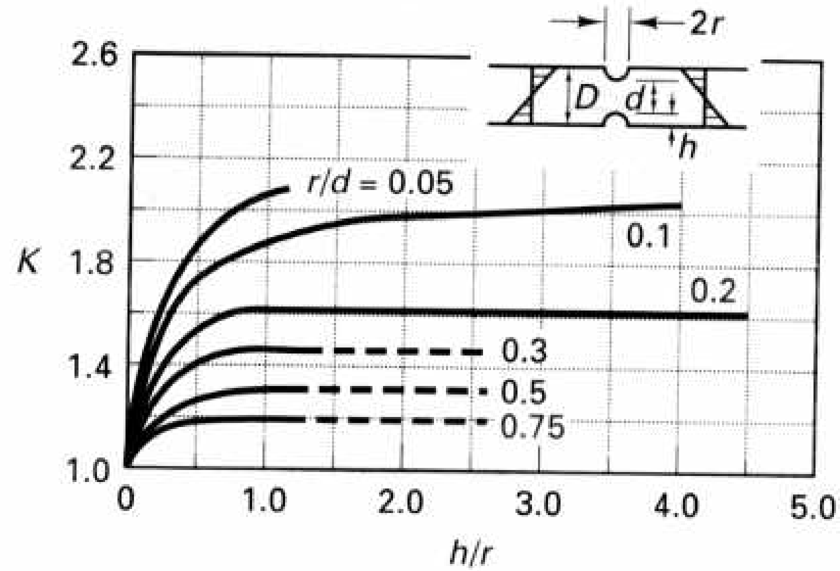
$$K = \frac{(\sigma_{máx})\ \text{real}}{(\sigma_{máx})\ \text{nominal}}$$

Significado del factor de concentración de esfuerzos en flexión.

Concentración de Tensiones

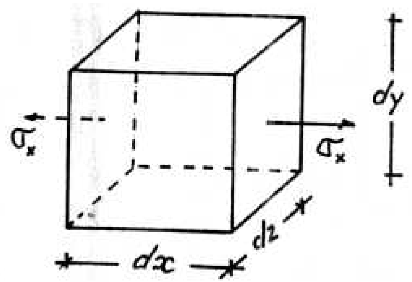


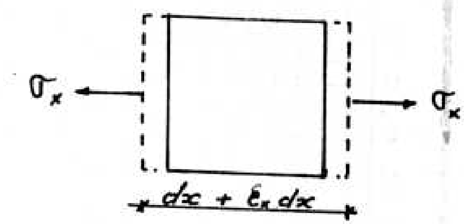
Factores de concentración de esfuerzos en flexión pura para barras planas con diversos filetes.



Factores de concentración de esfuerzos en flexión para barras planas ranuradas.

Energía Potencial de la Deformación en la Flexión





$$U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dx\, dy\, dz$$

$$U = \iiint_V \frac{1}{2E}\left(\frac{M\,y}{I_z}\right)^2 dx\, dy\, dz$$

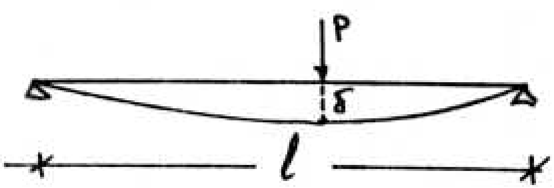
$$U = \int_L \frac{M^2 dx}{2EI_z^2}\left[\iint_A y^2 dy\,.\,dz\right] = \int_L \frac{M^2\, I_z}{2EI_z^2}\, dx$$

$$\boxed{U = \int_L \frac{M^2 dx}{2EI_z}}$$

$$dU = \underbrace{\frac{1}{2}\,\sigma_x . dz . dy}_{\text{fuerza media}} \;.\; \underbrace{\varepsilon_x\, dx}_{\text{desplazamiento}} = \frac{1}{2}\,\sigma_x\, \varepsilon_x\, dV = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma_x^2}{E}\, dV$$

TRABAJO DE LAS FUERZAS EXTERIORES

$$\boxed{W = \frac{P\delta}{2}}$$



Casos particulares – Energía potencial elástica interna de Deformación

a) Barras cargadas axialmente

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{A E} dx$$

b) Barras flexionadas

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{I_z E} dx$$

c) Barras torsionadas

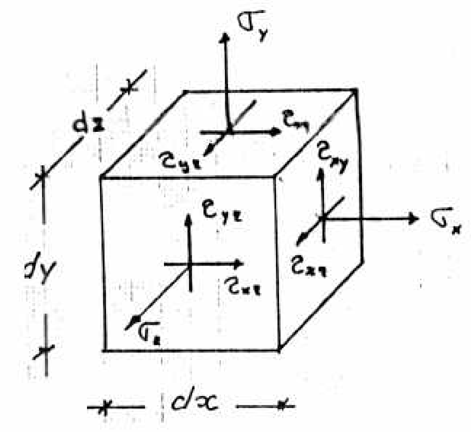
c.1- Barras cilíndricas circulares

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_T^2}{G I_p} dx$$

c.2- Barras de sección hueca de paredes delgadas (por unidad de longitud)

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_T^2}{4 \Omega^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

Energía de Deformación interna Total



a) En función de las tensiones internas:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\mu_{xy} + \tau_{xz}\mu_{xz} + \tau_{yz}\mu_{yz}\right) dx.dy.dz$$

b) En función de las cargas actuantes:

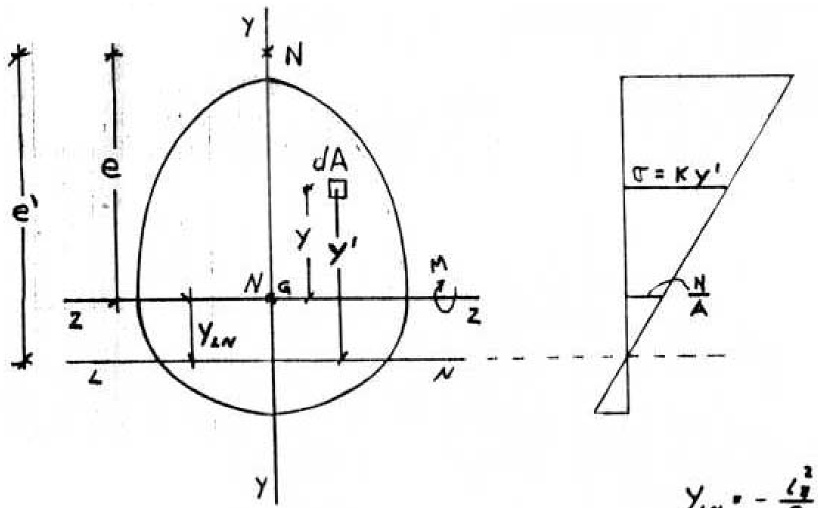
$$U = \int_l \frac{M_z^2\,dx}{2EI_z} + \int_l \frac{M_y^2\,dx}{2EI_y} + \int_l \frac{M_T\,dx}{2GI_p} + \int_l \frac{N^2 dx}{2AE} + k_z\int_l \frac{Q_z\,dx}{2AG} + k_y\int_l \frac{Q_y\,dx}{2AG}$$

Próxima Clase: Tensión Cortante en la Flexión

Fin

Primer Parcial: Teoría hasta flexión pura, menos Torsión
Practica hasta Torsión

Fórmula referida a la Línea Neutra (ejes de reducción principales principales)



$$y_{LN} = -\frac{i_z^2}{e}$$

A revisar en Flexión Compuesta

$$\int_A \sigma y \, dA = M \qquad \int_A \sigma \, dA = N$$

$$\sigma = K y' \qquad y = y' - y_{LN}$$

$$K \int_A y'(y' - y_{LN}) \, dA = M \qquad K \int_A y' \, dA = N$$

$$K \int_A y'^2 \, dA - K \int_A y_{LN} \, y' \, dA = M \qquad K \, M_{s\,LN} = N$$

$$K \, I_{LN} - K \, y_{LN} \, M_{s\,LN} = M \qquad K = \frac{N}{M_{s\,LN}}$$

$$K = \frac{M}{I_{LN} - A \, y_{LN}^2} = \frac{M}{I_z} \qquad \sigma = \frac{N}{M_{s\,LN}} y'$$

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y' \qquad \sigma = \frac{N}{A} \frac{y'}{y_{LN}}$$

$$\sigma = \frac{N e}{I_z} y'$$

Próxima Clase: Tensiones cortantes en la flexión

Fin