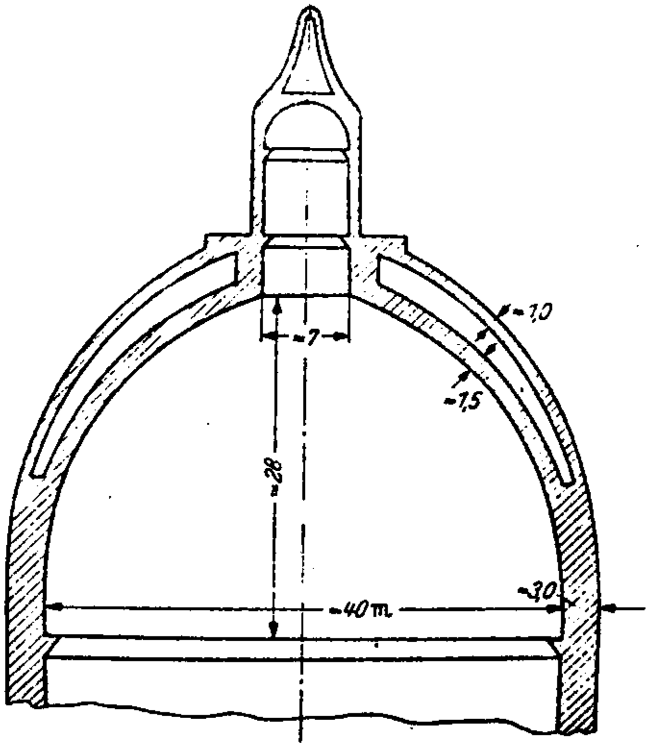
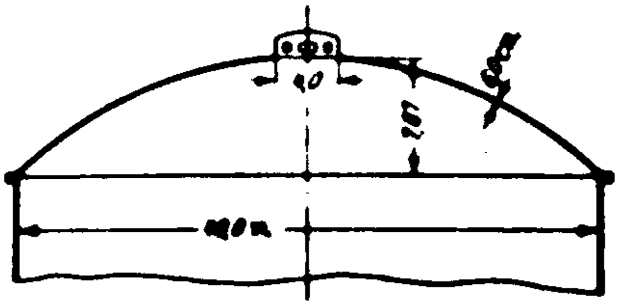
Paredes Delgadas

Clase 6

Recipiente de Revolución de Paredes Delgadas

Importancia práctica de la evolución de los cálculos





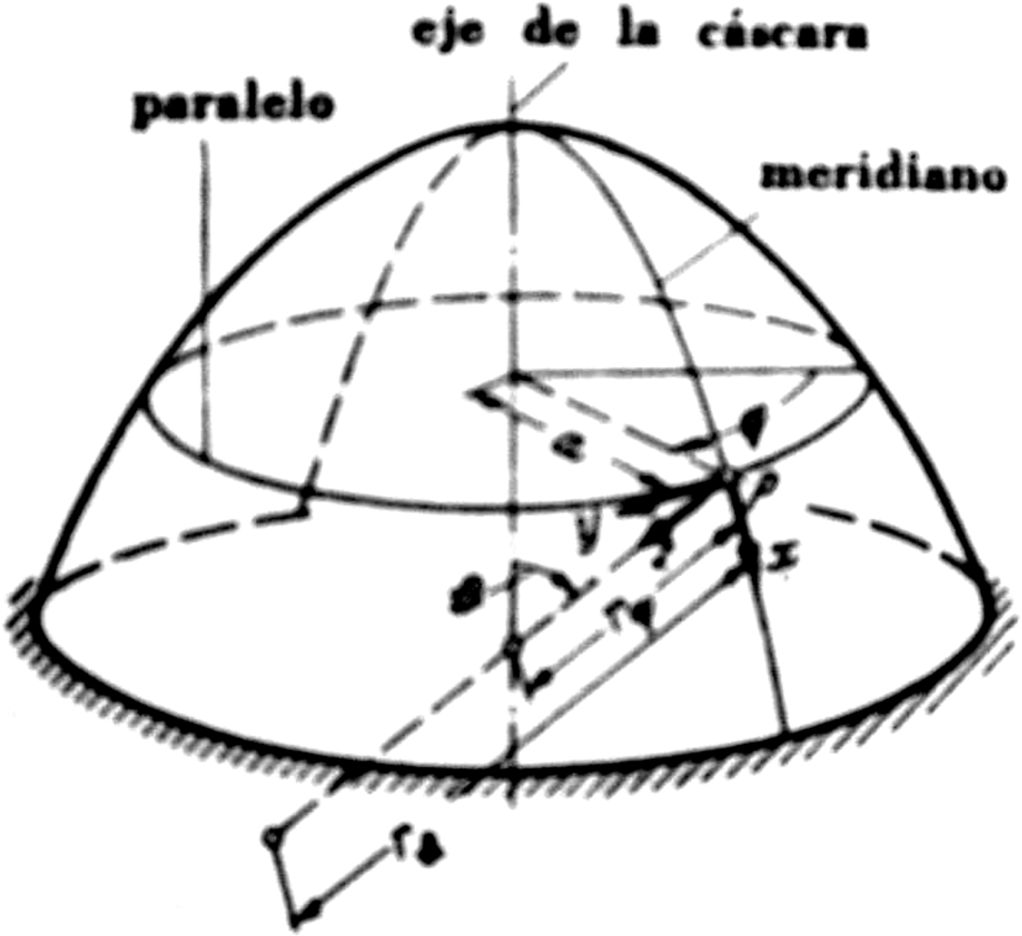
Catedral de San Pedro, edificada en el siglo XVI, Luz 40 m, espesor promedio de 3 metros.

Cúpula moderna erigida en Jena, Luz 40 m, espesor 6 cm, peso total 330 Tn..

Teoría de las Cáscaras Delgadas - Bases del Cálculo

- Geometría de las cáscaras
  - Superficie media
  - Espesor
- Hipotesis y suposiciones
  - Se puede despreciar las tensiones normales perpendiculares a la superficie media
  - Todos los puntos sobre una normal a la superficie media antes de la deformación permanecen sobre una recta después de ella.
  - Esta recta también es normal a la superficie media deformada.
  - La deformación es pequeña respecto al espesor.

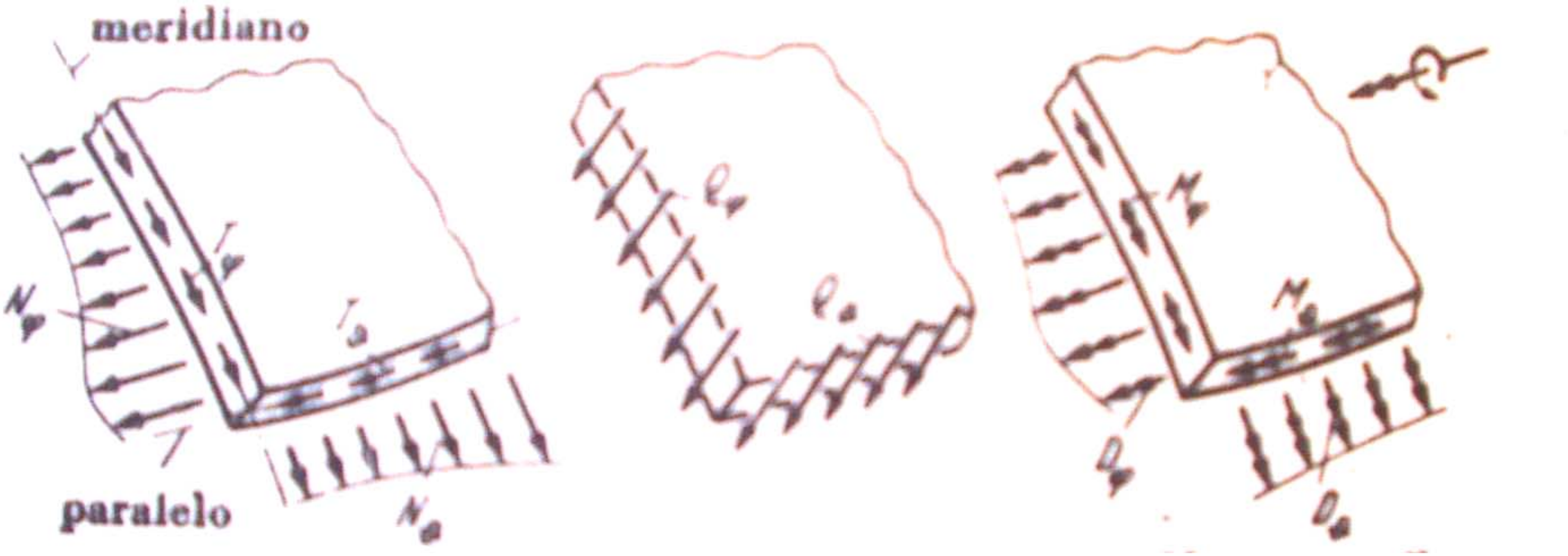
Teoría Membranal de las cáscaras de revolución



Las cáscaras de revolución son la clase más importante de cáscaras para la construcción de cúpulas y depósitos.

Además de esto, son más fácil de describir matemáticamente, y así, de analizarlas.

Características de las cáscaras de revolución



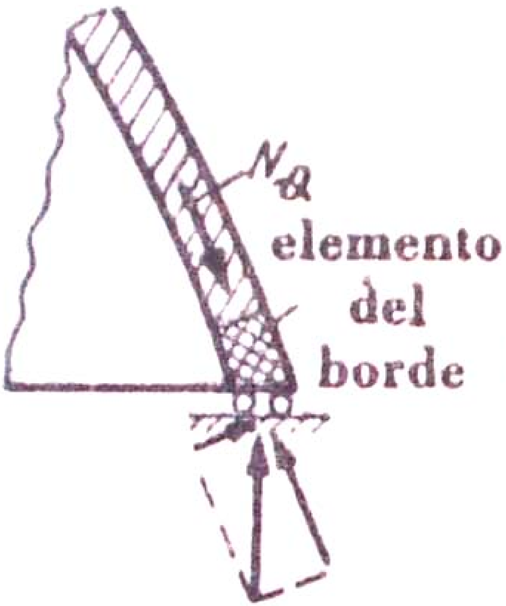
Fuerzas normales y fuerzas tangenciales repartidas

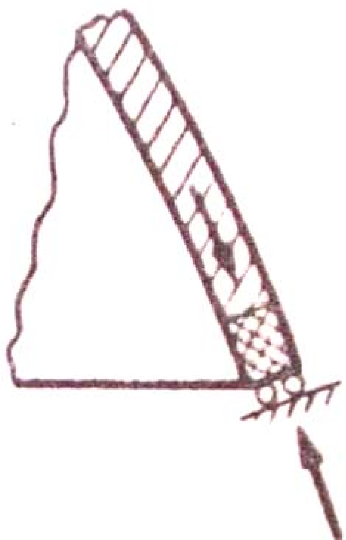
Fuerzas de corte repartidas

Momentos flectores y momentos torsores unifirmemente repartidas

La teoría membranal solo es aplicable con condiciones de borde convenientes

Dependencia del equilibrio de las fuerzas membranales con las condiciones de apoyo de una cáscara

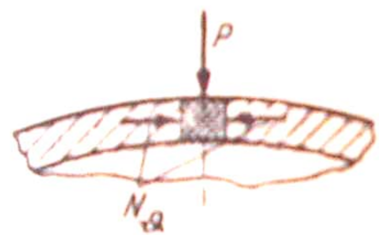


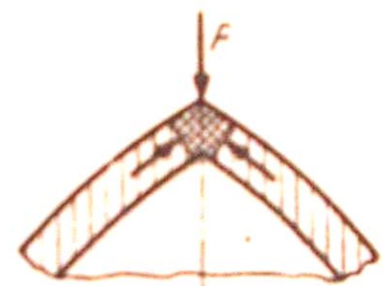


Sin equilibrio

En equilibrio

Equilibrio de las fuerzas membranales con cargas concentradas





Sin equilibrio

En equilibrio

Hipótesis del estado de tensiones membranales

- Hay 10 incognitas (2 Torsores, 2 Flectores, 2 Tensiones Normales, 2 Tensiones Cortantes, 2 Tensiones Tangenciales)
- Y solo 6 ecuaciones (3 sumatorias de fuerzas y 3 de momentos)
- El problema es indeterminado interiormente, por tanto, es necesario considerar las deformaciones para resolverlo
- Es posible evitar el cálculo mediante una teoría aproximada, que en muchos casos, aunque no siempre, da resultados útiles, esta es la llamada "Teoría de la Membrana".

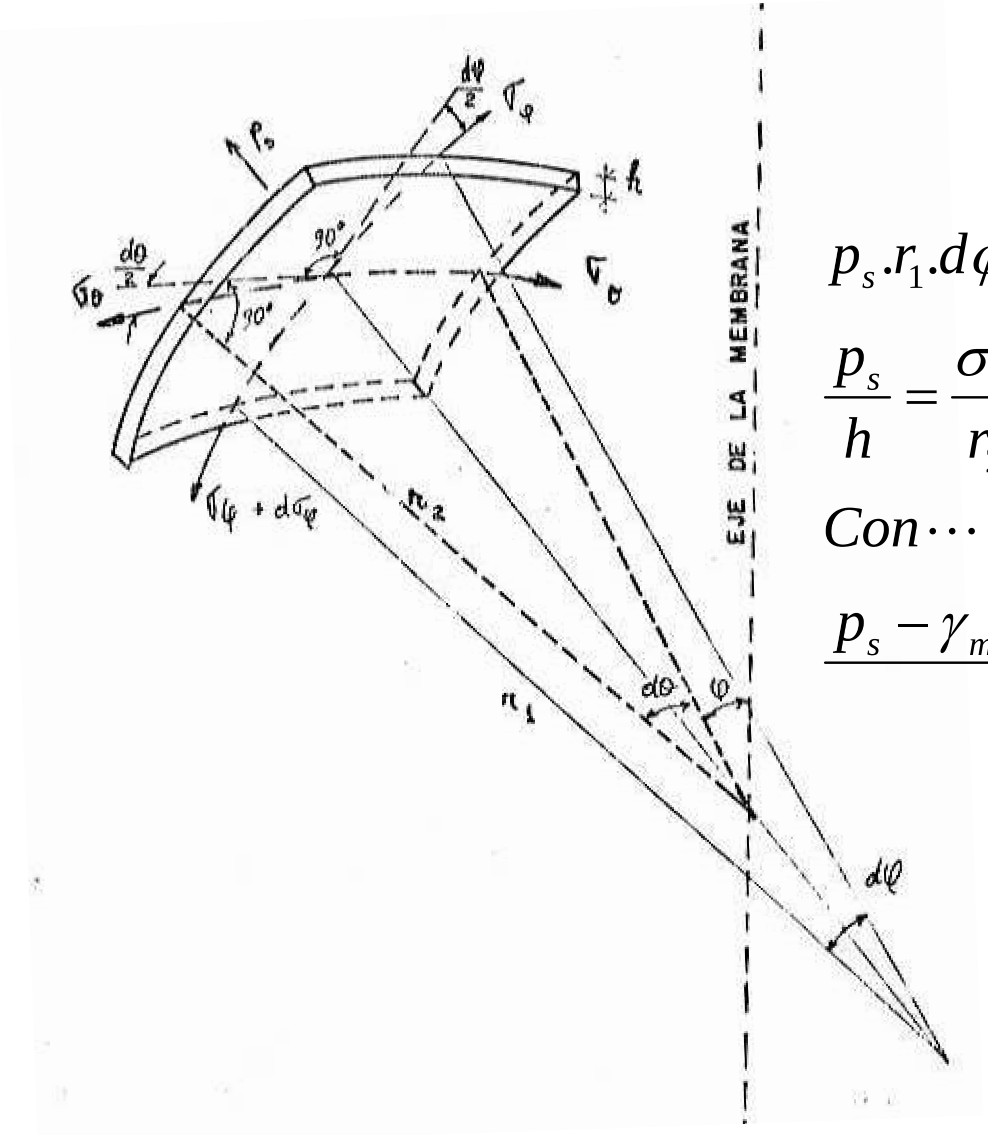
Teoría de la Membrana

- Suponiendo que una cáscara tiene el comportamiento de barras biarticuladas, pero en dos direcciones, podemos suponer:
  - En el elemento solo aparecen **fuerzas normales**, y no **momentos flectores** ni **fuerzas de corte**.
  - Si calculamos la cáscara considerando los **momentos flectores** y **fuerzas de corte**, las tensiones generadas por éstas son pequeñas respecto a las tensiones generadas por las **fuerzas normales**
- Existe limitación de esta suposición, en la medida de que en realidad las membranas no tienen un comportamiento exacto al de las barras en dos direcciones.

Limitaciones de la Teoría de la Membrana:

- Es aplicable en condiciones de bordes convenientes.
- No es compatible con la teoría membranal las cargas concentradas que actúen perpendicularmente a la superficie media.
- El espesor de la membrana es delgado, esto es, no es gruesa y tampoco de espesor despreciable.

Análisis de tensiones en un punto

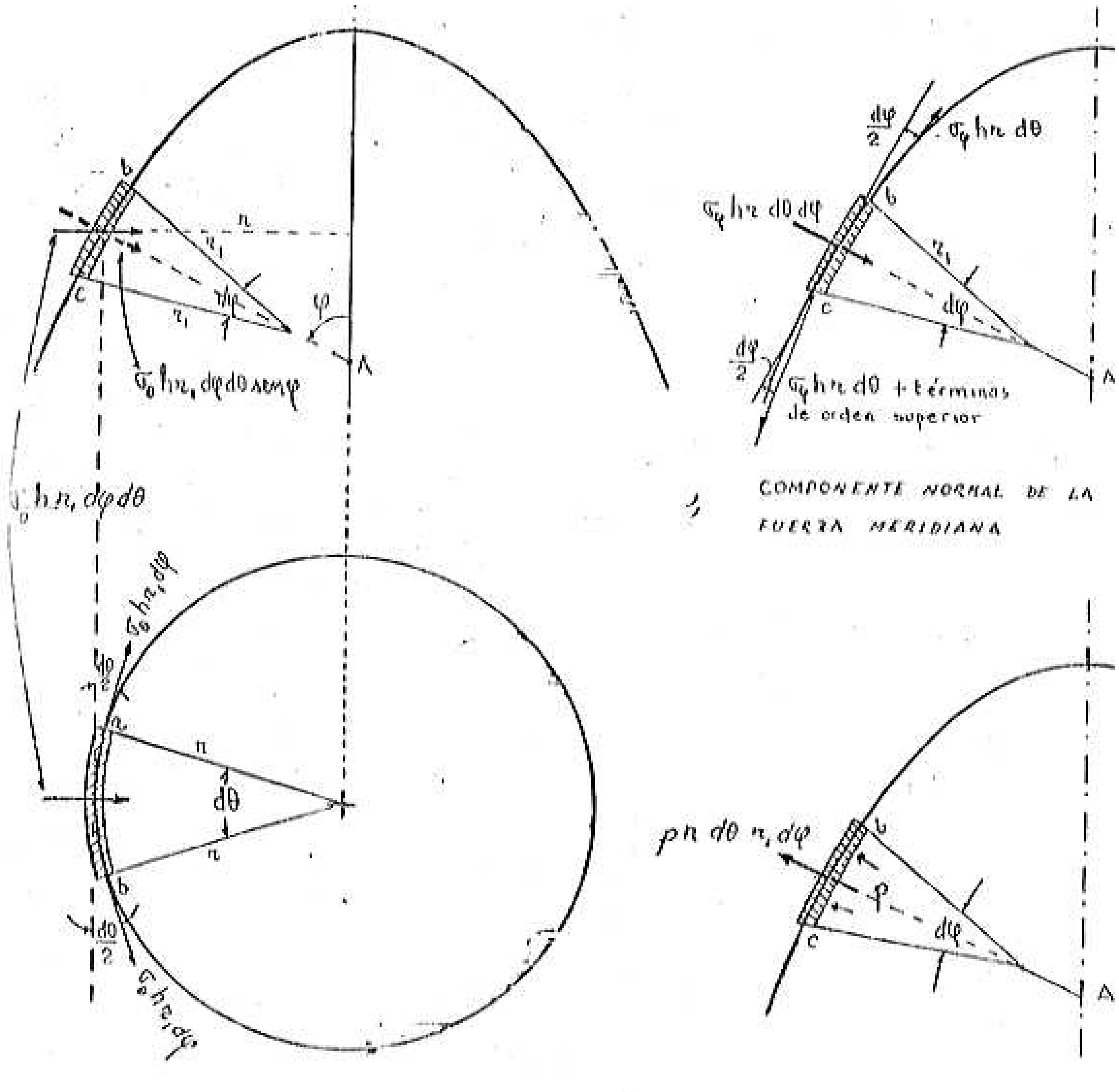


$$p_s.r_1.d\varphi.r_2.d\theta = \sigma_\theta.h.r_1.d\varphi.d\theta + \sigma_\varphi.h.r_2.d\theta.d\varphi$$

$$\frac{p_s}{h} = \frac{\sigma_\theta}{r_2} + \frac{\sigma_\varphi}{r_1}$$

$$Con \cdots peso \cdots propio$$

$$\frac{p_s - \gamma_{material}.h.\cos\varphi}{h} = \frac{\sigma_\theta}{r_2} + \frac{\sigma_\varphi}{r_1}$$

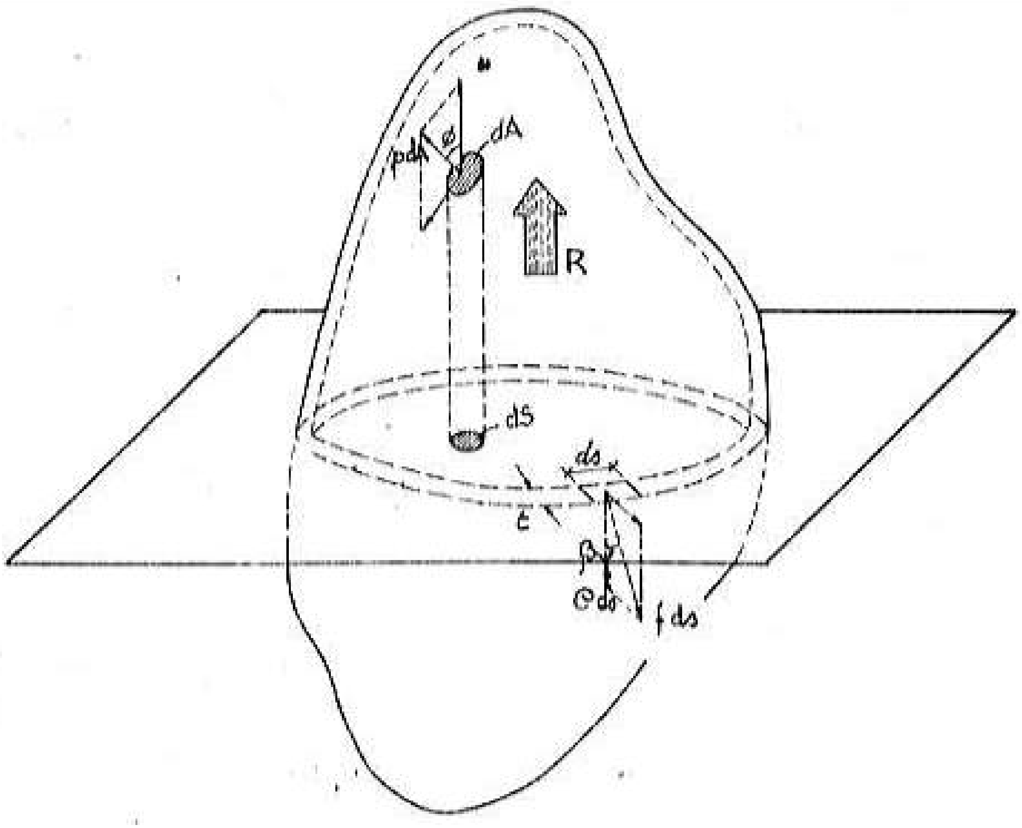


COMPONENTE NORMAL DE LA FUERZA MERIDIANA

COMPONENTE NORMAL DE LA FUERZA DE ARO

RESULTANTE DE p

Teorema1: Dada una envolvente delgada de forma cualquiera, bajo una presión efectiva “p”, la suma de los esfuerzos interiores normales a la sección es igual al empuje ejercido por la presión sobre el área plana comprendida en el interior de la sección



$$dF = p.dA$$

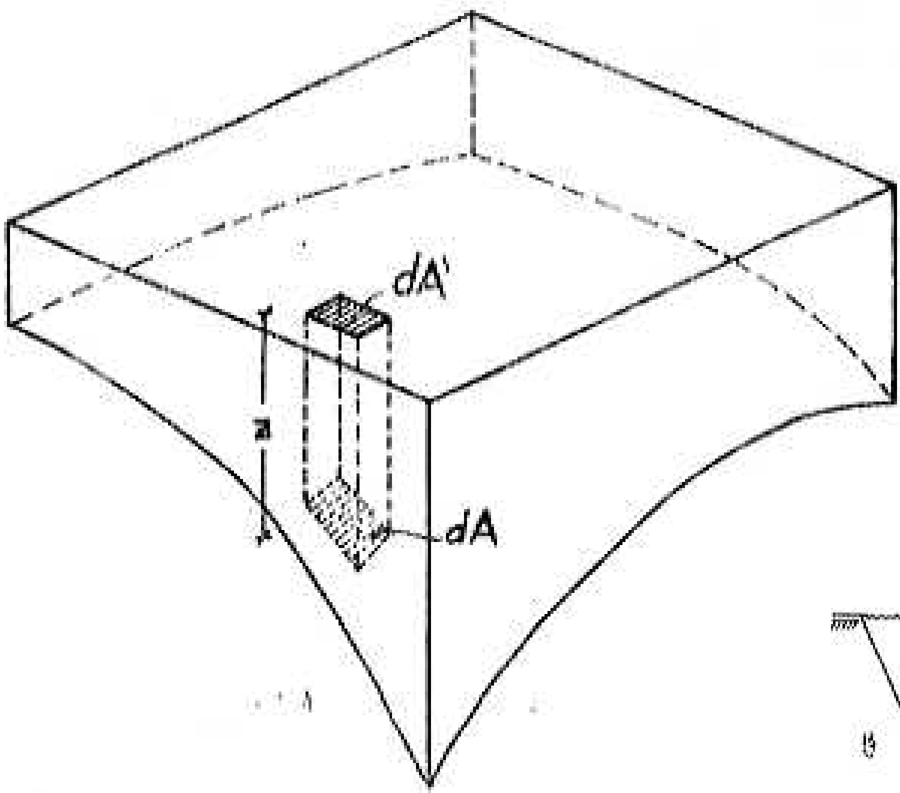
$$df = f.ds$$

$$\int_A p.\cos\varphi.dA = \int_S f.\cos\beta.ds$$

$$\int_A p.dS = \int_S \sigma.t.ds$$

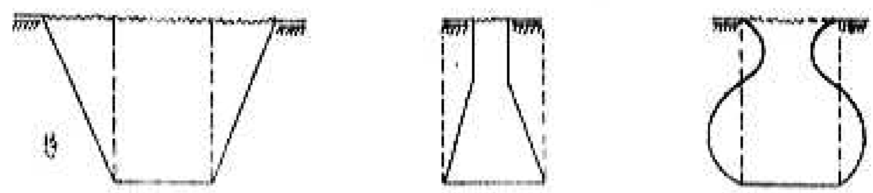
$$p.S = \sigma.t.S = R$$

Teorema 2: Si sobre una superficie actúa la presión de un líquido, la componente vertical de las fuerzas de presión será igual al peso del líquido en el volumen situado sobre la superficie

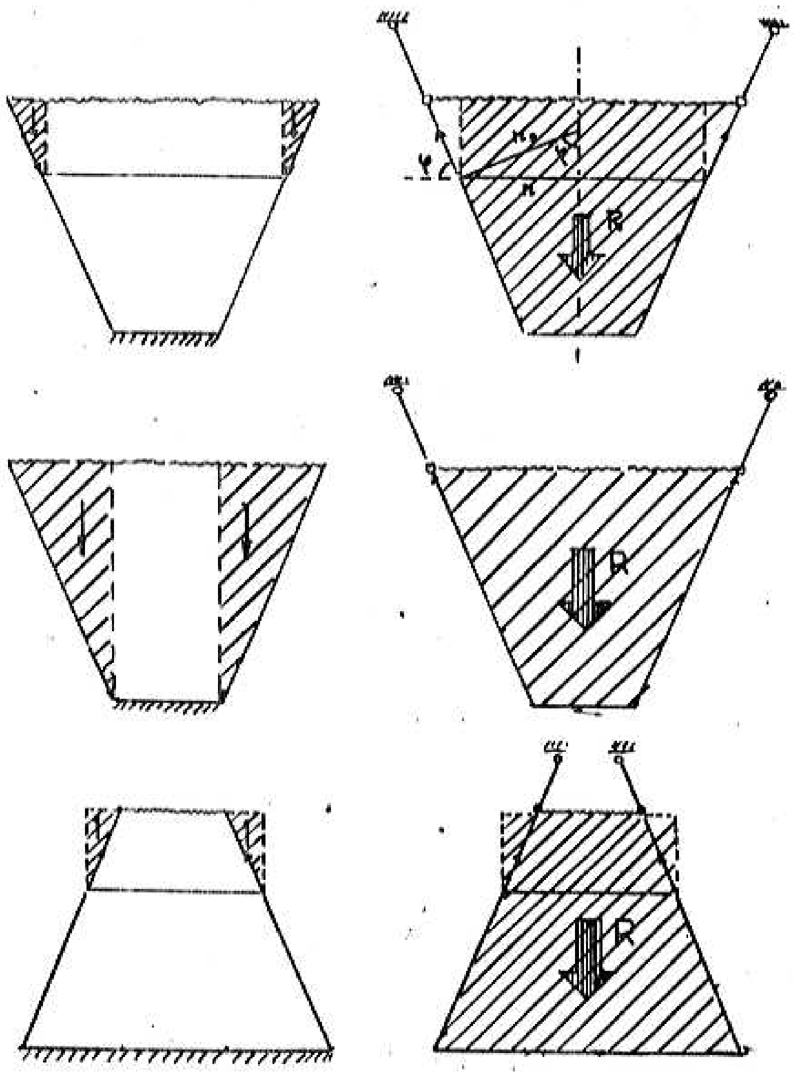


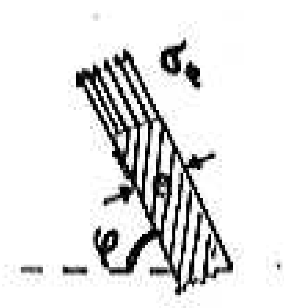
$$dR = p \,.\, dA'$$
$$dR = \mu \,.\, z \,.\, dA'$$
$$dR = \mu \,.\, dV$$

$$\underline{R = \mu \,.\, V}$$



Caso de los depósitos para líquidos

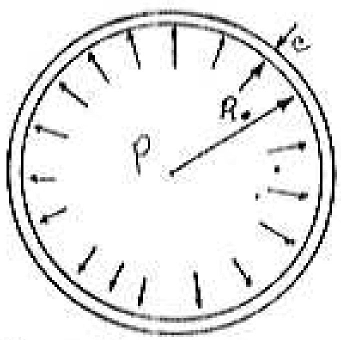


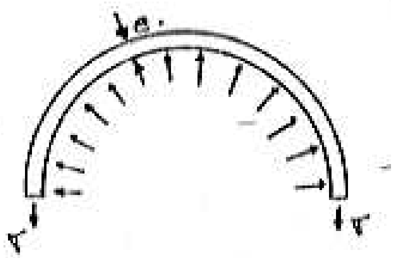


$$\sigma_{\varphi}.e.2.\pi.r.sen\varphi = R$$

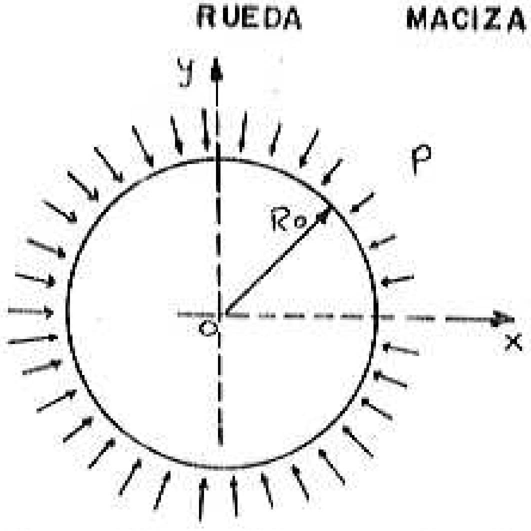
$$r = r_2.sen\varphi$$

Tubos y aros de paredes delgadas





$$\varepsilon_c = \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C - C_0}{C_0} = \frac{2.\pi.(R_0 + \Delta R) - 2.\pi.R_0}{2.\pi.R_0} = \frac{\Delta R}{R_0} = \varepsilon_R$$



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\sigma_x}{E} - \mu.\left(\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

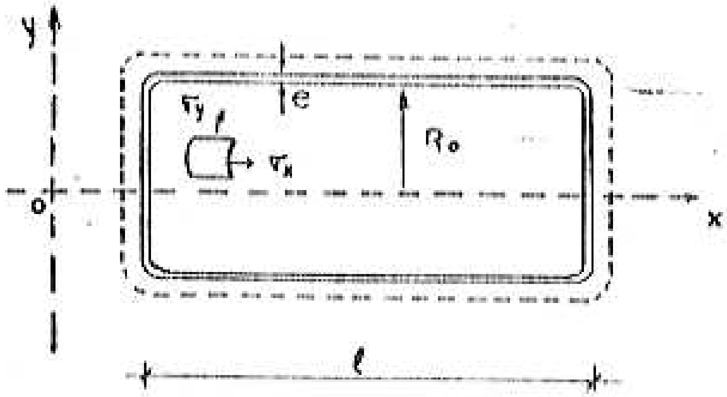
$$\sigma_x = \sigma_y = p$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{p}{E}.(1 - \mu)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta r}{R} = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{p}{E}.(1 - \mu)$$

Reservorios Cilíndricos



$$\sigma_y = \frac{p R_o}{e}$$

$$\sigma_x = \frac{p R_o}{2e}$$

$$\sigma_z \approx 0$$

DEFORMACION RADIAL

$$\varepsilon_R = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{p R_o}{E e} - \mu \frac{p R_o}{2 E e} = \frac{p R_o}{2 e E} (2 - \mu)$$

DEFORMACION LONGITUDINAL

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{p R_o}{2 E e} - \mu \frac{p R_o}{E e} = \frac{p R_o}{2 e E} (1 - 2\mu)$$

DEFORMACION VOLUMETRICA

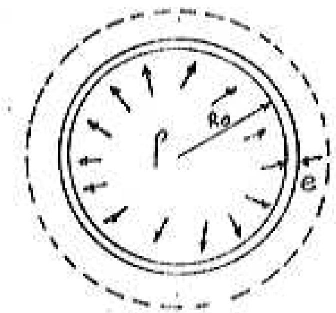
$$\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x = \varepsilon_L = \frac{p R_o}{2 e E} (1 - 2\mu)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_y = \frac{p R_o}{2 e E} (2 - \mu)$$

$$\varepsilon_V = \frac{p R_o}{e E} (2{,}5 - 2\mu) > 0 \; !$$

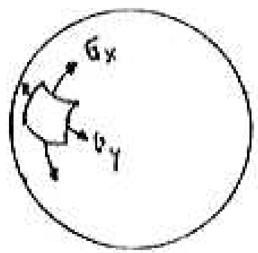
Reservorios Esféricos



$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{pR}{2e} \qquad \sigma_2 = 0$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{pR_o}{2Ee}(1-\mu)$$



DEFORMACION RADIAL

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_R$$

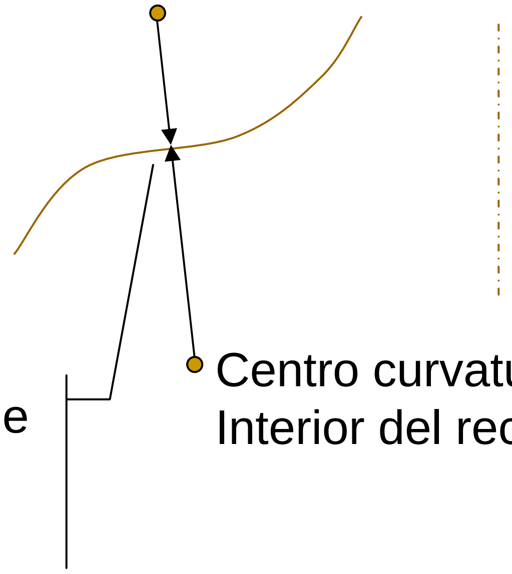
DEFORMACION VOLUMETRICA

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_v = 3\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{pR_o}{Ee}(1-\mu)$$

Reflexiones sobre la fórmula de Laplace

a) Validez en punto de inflexión de la curva generatriz



b) Dependencia del tipo de material

Próxima Clase: Corte Puro