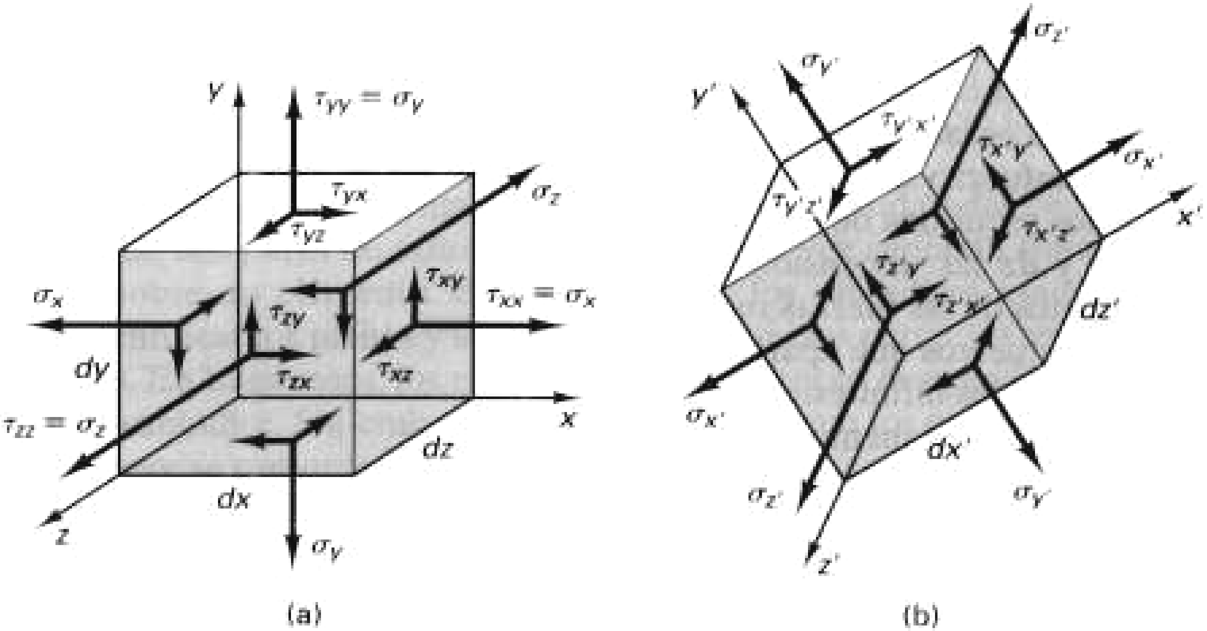
Estado Plano de Tensiones

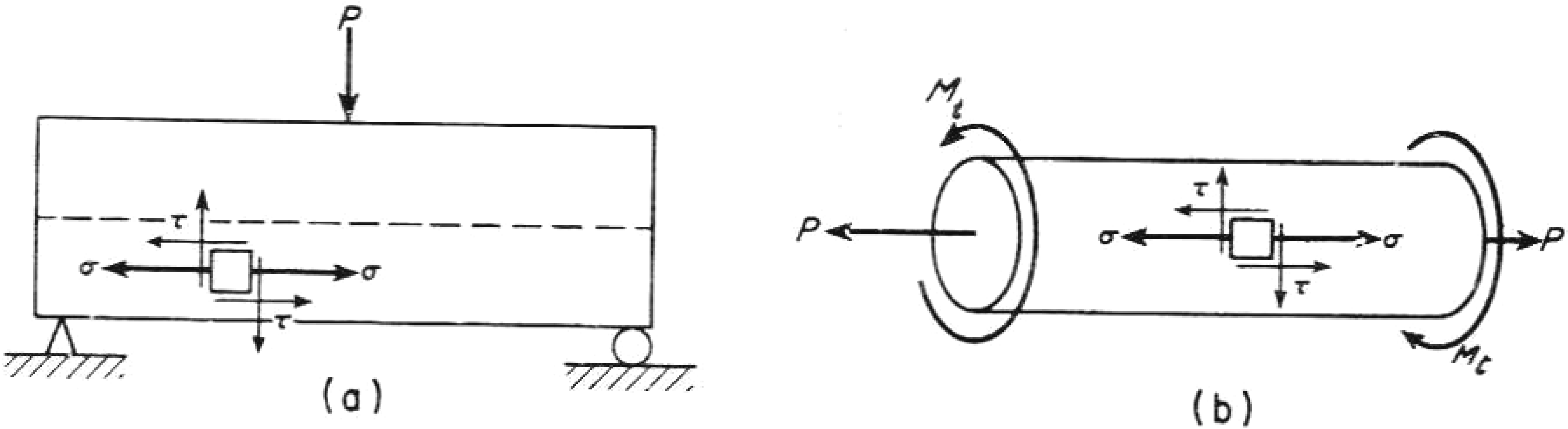
Clase 18

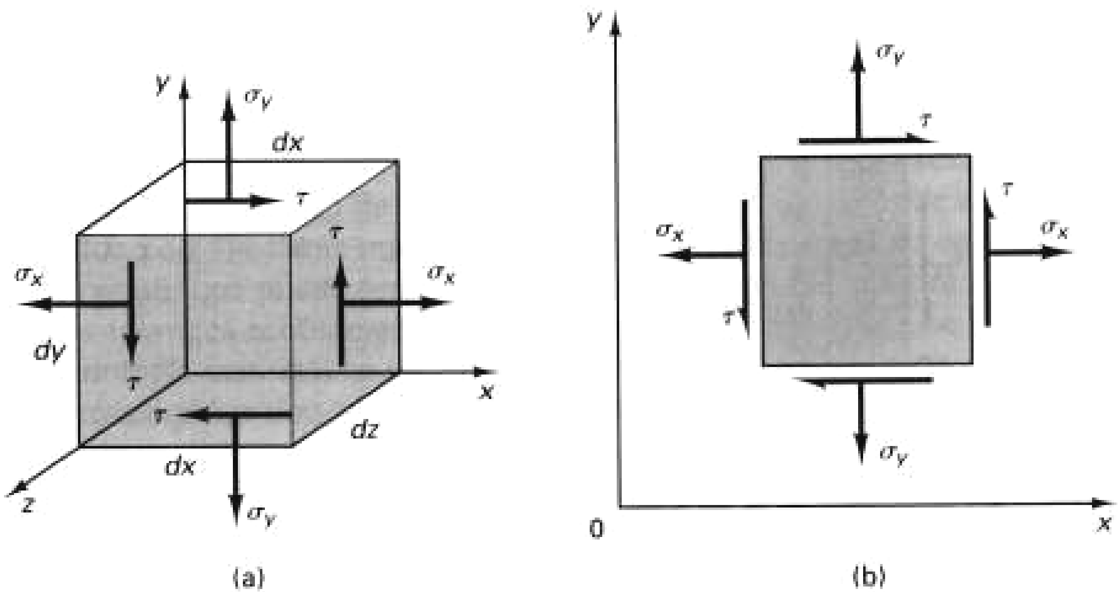
Circulo de Mohr, Ejercicios, Casos Particulares, Elipse de Lamé, Líneas Isostáticas, Isóbaras, Isóclinas, de máxima tensión cortante. Estado Triple de tensiones, Circulo de Mohr, Tensiones Octaédricas

ESTADO PLANO DE TENSIONES

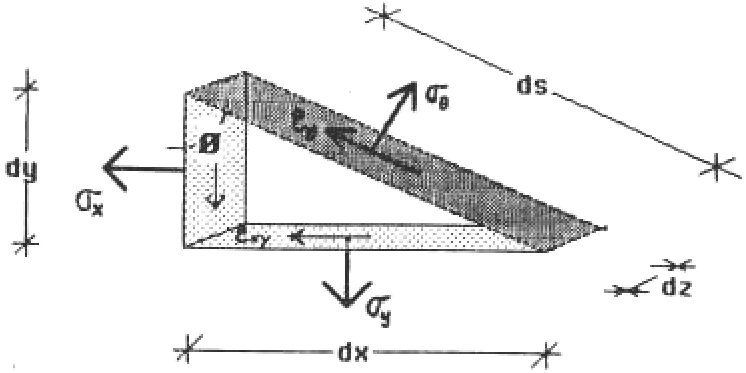


(a) Estado general de esfuerzo actuando sobre un elemento infinitesimal en el sistema coordenado inicial. (b) Estado general de esfuerzo actuando sobre un elemento infinitesimal definido en un sistema girado de ejes coordenados. Todos los esfuerzos tienen sentido positivo.





Elementos de esfuerzo en un plano.

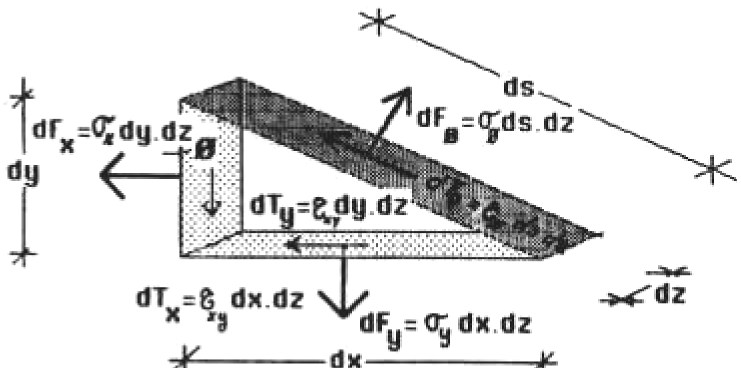


$$\sigma_\theta = \sigma_x \cdot \cos^2\theta + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}^2\theta + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$$

$$\tau_\theta = -\sigma_x \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + \sigma_y \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + \tau_{xy} \cdot \cos^2\theta - \tau_{xy} \cdot \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\theta)$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2\theta)$$



$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta + \sigma_{90+\theta} = \sigma_x + \sigma_y$$

Además:

$$dy = \frac{ds}{\cos\theta} \qquad dx = \frac{ds}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\tau_\theta = -\tau_{90+\theta}$$

$$\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0 \qquad tg\, 2\theta_1 = tg\, 2\theta_2 = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)}$$

ADEMAS :

$$sen\, 2\theta_i = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_i = \frac{1/2\,(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

ENTONCES

$$\sigma_{1;2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad ; \quad \tau = 0$$

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \qquad tg\, 2\theta_3 = tg\, 2\theta_4 = \frac{-1/2\,(\sigma_x - \sigma_y)}{\tau_{xy}}$$

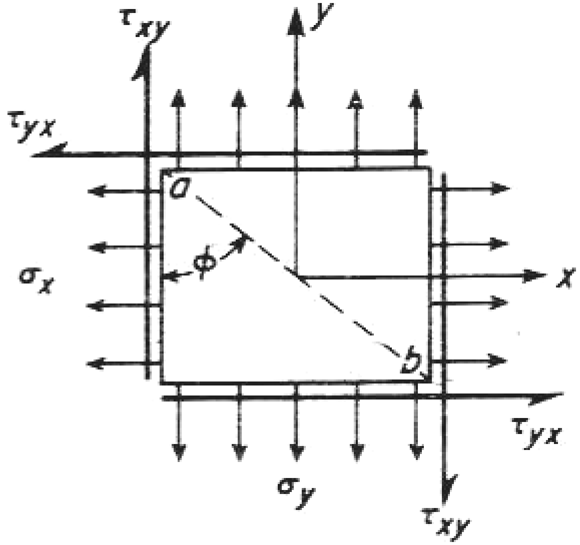
$$sen\, 2\theta_j = \frac{-\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

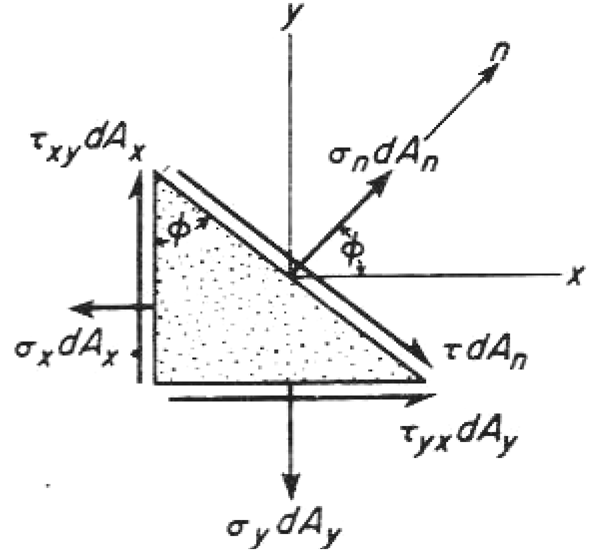
$$\cos 2\theta_j = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

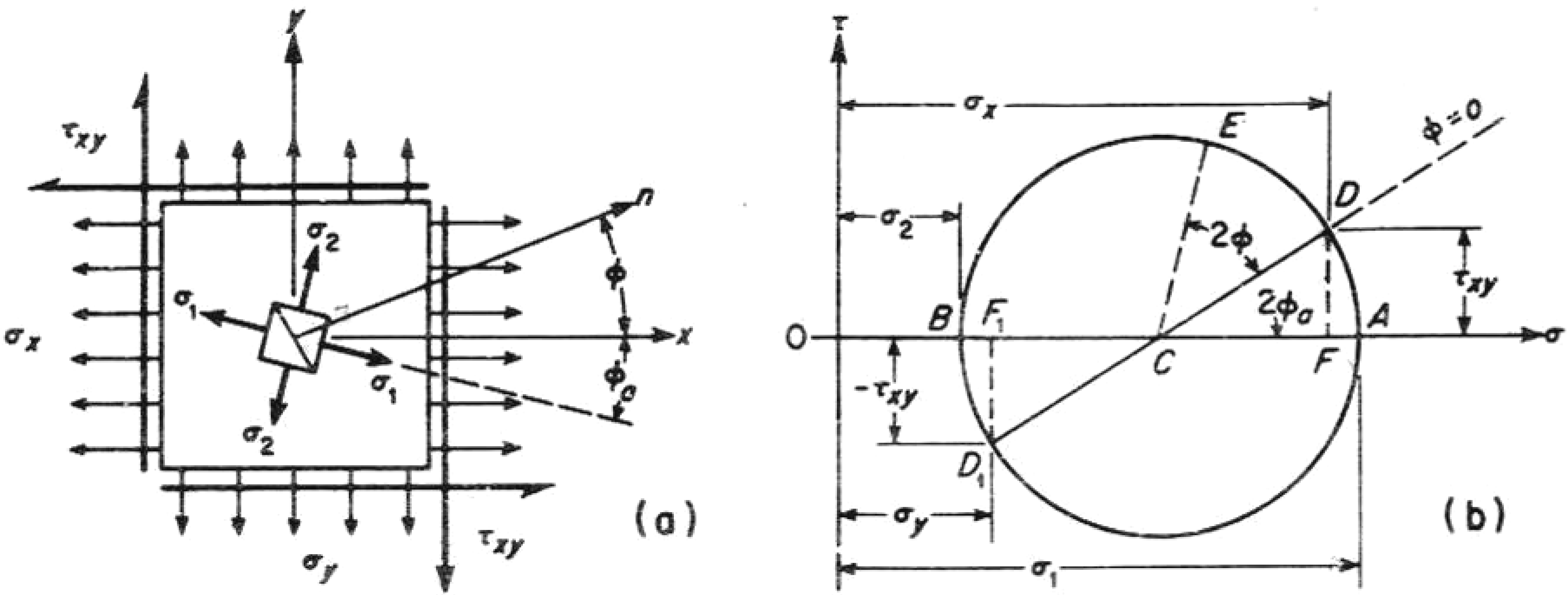
$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad ; \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$tg\, 2\theta_i \cdot tg\, 2\theta_j = -1$$

CONSTRUCCIÓN DEL CIRCULO DE MOHR







Para el equilibrio en la dirección n se deberá tener

$$\sigma_n dA_n = \sigma_x dA_n \cos^2 \phi + \sigma_y dA_n \operatorname{sen}^2 \phi - 2\tau_{xy} dA_n \cos \phi \operatorname{sen} \phi \tag{a}$$

Análogamente, para el equilibrio en la dirección perpendicular a n, debemos tener

$$\tau dA_n = \sigma_x dA_n \cos \phi \operatorname{sen} \phi - \sigma_y dA_n \operatorname{sen} \phi \cos \phi + \tau_{xy} dA_n (\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi) \tag{b}$$

Las ecuaciones (a) y (b) son fácilmente reducidas a

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \phi + \sigma_y \operatorname{sen}^2 \phi - 2\tau_{xy} \operatorname{sen} \phi \cos \phi \\ &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\phi - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\phi, \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} \phi \cos \phi + \tau_{xy}(\cos^2 \phi - \operatorname{sen}^2 \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\phi + \tau_{xy} \cos 2\phi, \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Para localizar el plano de máxima tensión normal σ_n, podemos igualar a cero la derivada de la primera de las ecuaciones (7.1), $d\sigma_n/d\phi = 0$, y obtener

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{sen} 2\phi - 2\tau_{xy} \cos 2\phi = 0 \tag{c}$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\phi = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{7.2}$$

Propiedades del Estado Plano de Tensiones

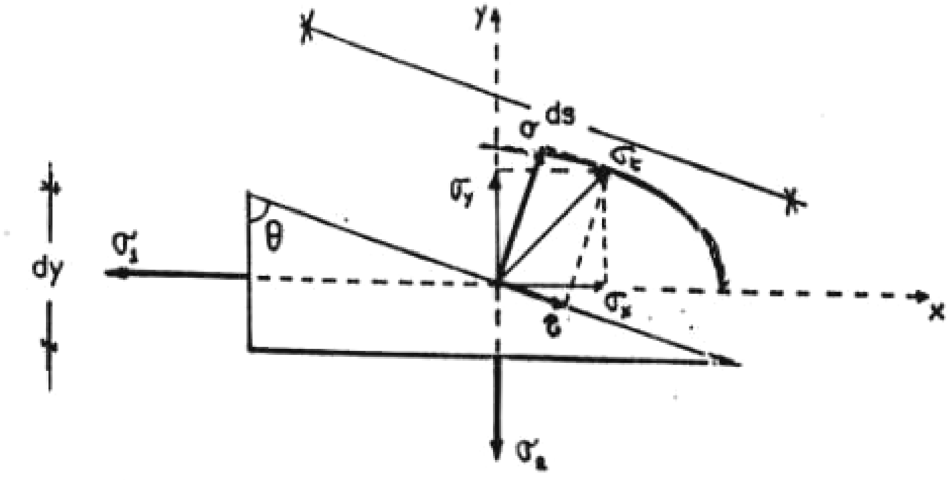
- Las tensiones normales extremas, denominadas **tensiones principales**, se dan en dos planos, perpendiculares entre sí, denominados **planos principales**. En esos planos la **tensión de corte** es nula.

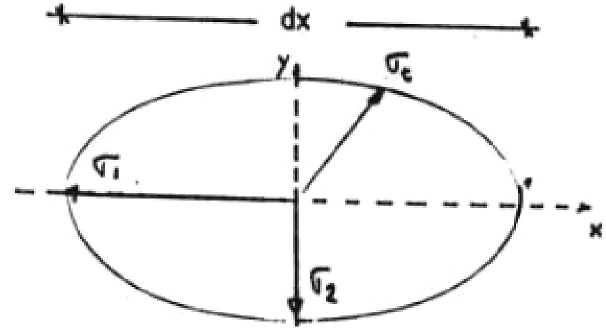
- La suma de las **tensiones normales**, que actúan en dos planos cualesquiera, perpendiculares entre sí, es igual a la suma de las **tensiones principales**.

- La **tensión máxima de corte**, dáse en los planos bisectores de los planos principales; en esos planos, la tensión normal es igual a la semisuma de las **tensiones principales**. En valor absoluto la **tensión máxima de corte** es igual a la semidiferencia de las **tensiones principales**.

- Las **tensiones de corte**, que actúan en dos planos cualesquiera y perpendiculares entre sí, son iguales y de signo contrario, esto es, convergen hacia la recta intersección de los planos considerados, o divergen.

Elipse de Lamé





<u>Elipse de Lamé:</u> es el lugar geométrico de los extremos del vector tensión total correspondiente a cada uno de los infinitos planos que pasan por el punto considerado.

$$\sigma_1 \cdot dy \cdot t = \sigma_x \cdot ds \cdot t$$

$$\sigma_1 \cdot dy = \sigma_x \cdot \frac{dy}{\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\sigma_x}{\sigma_1}$$

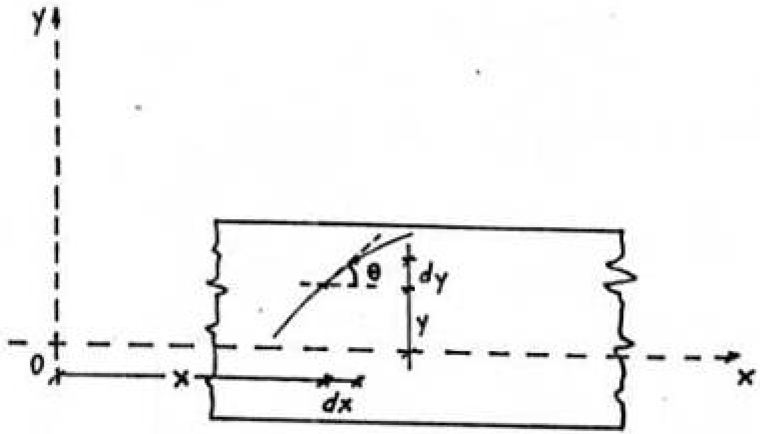
$$\sigma_2 \cdot dx \cdot t = \sigma_y \cdot ds \cdot t$$

$$\sigma_2 \cdot dx = \sigma_y \cdot \frac{dx}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sigma_y}{\sigma_2}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_2^2} = 1}$$

A lo largo de estas <u>Isostáticas</u> las tensiones tangenciales son nulas; y un elemento plano limitado por cuatro segmentos cualesquiera de estas curvas, sufre solamente tensiones normales en es contorno.



$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

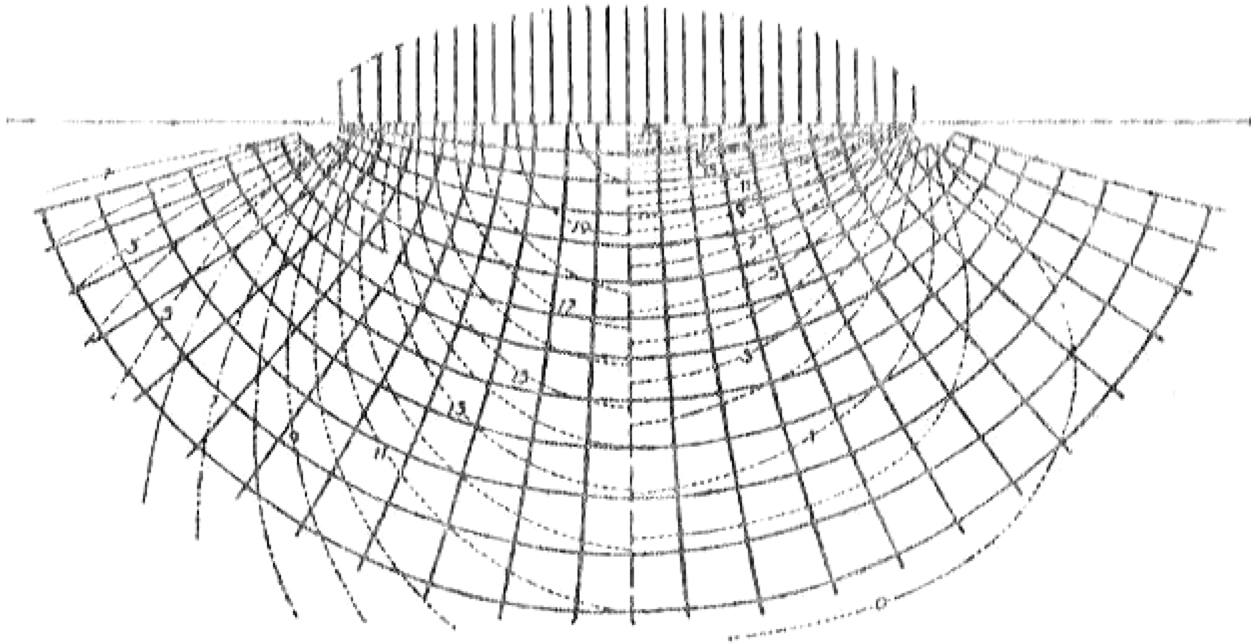
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2\,\frac{dy}{dx}}{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{\tau_{xy}} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0$$

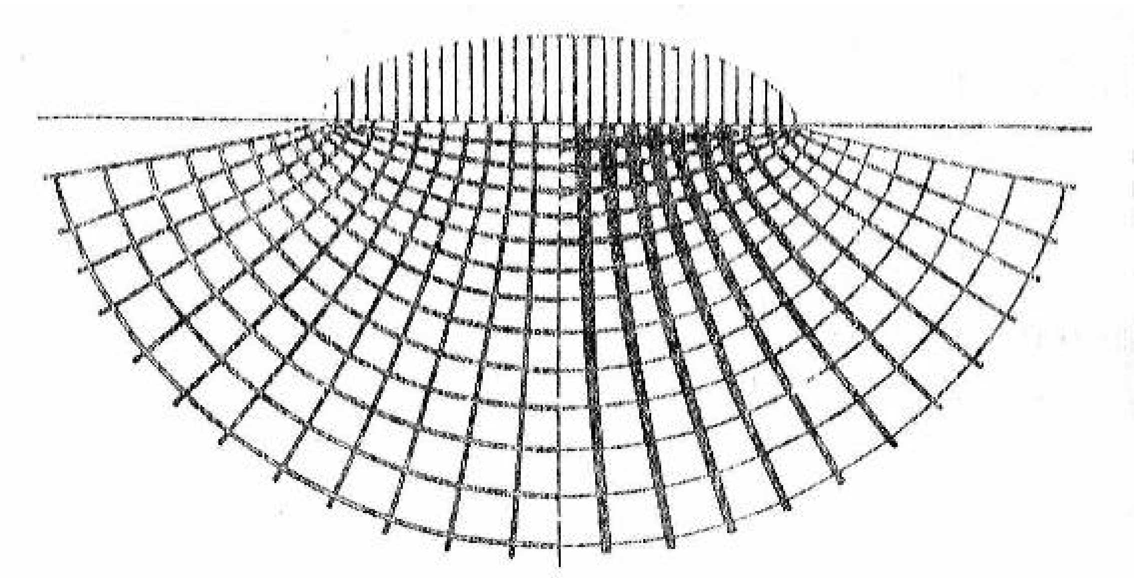
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{1+\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2}}$$

Como en la ecuación de las isostáticas, el producto de las dos raíces vale -1, se comprueba nuevamente la perpendicularidad de las dos familias de isostáticas en cualquier punto



Para construir las isostáticas basta representar en unos cuantos puntos suficientemente próximos las tensiones principales en dirección y magnitud, construyendo por ejemplo, los círculos de Mohr correspondientes, y trazar las envolventes de las direcciones principales , así obtenidas, mediante cualquier procedimiento gráfico, e inclusive a sentimiento.

Líneas Isóbaras: curvas de igual valor de las tensiones principales correspondientes a cada familia de isostáticas. Hay pues, dos familias o grupos de isóbaras correspondientes, cada uno de ellos con cada una de las dos familias de isostáticas, o de direcciones principales.



En muchos casos, es preferible representar la magnitud de la tensión principal, bien por la longitud, a lo largo de ellas, de los trazos que la forman, bien por su grueso variable a lo largo de la isostática.

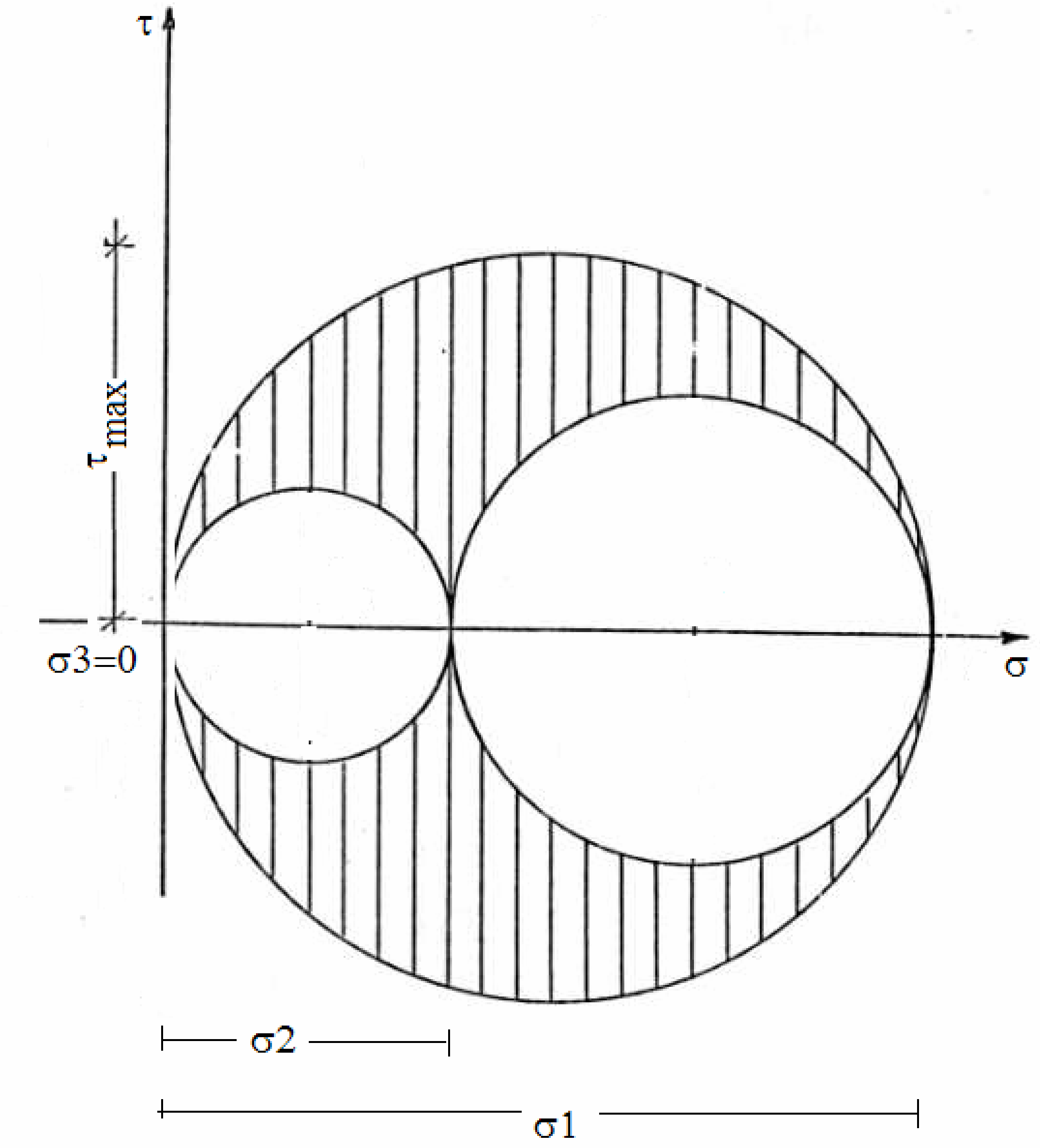
RESUMEN DE DEFINICIONES

LINEAS ISOSTÁTICAS: envolventes de las tensiones principales

LÍNEAS ISÓBARAS: curvas de igual valor de las tensiones principales correspondientes a cada familia de isostáticas

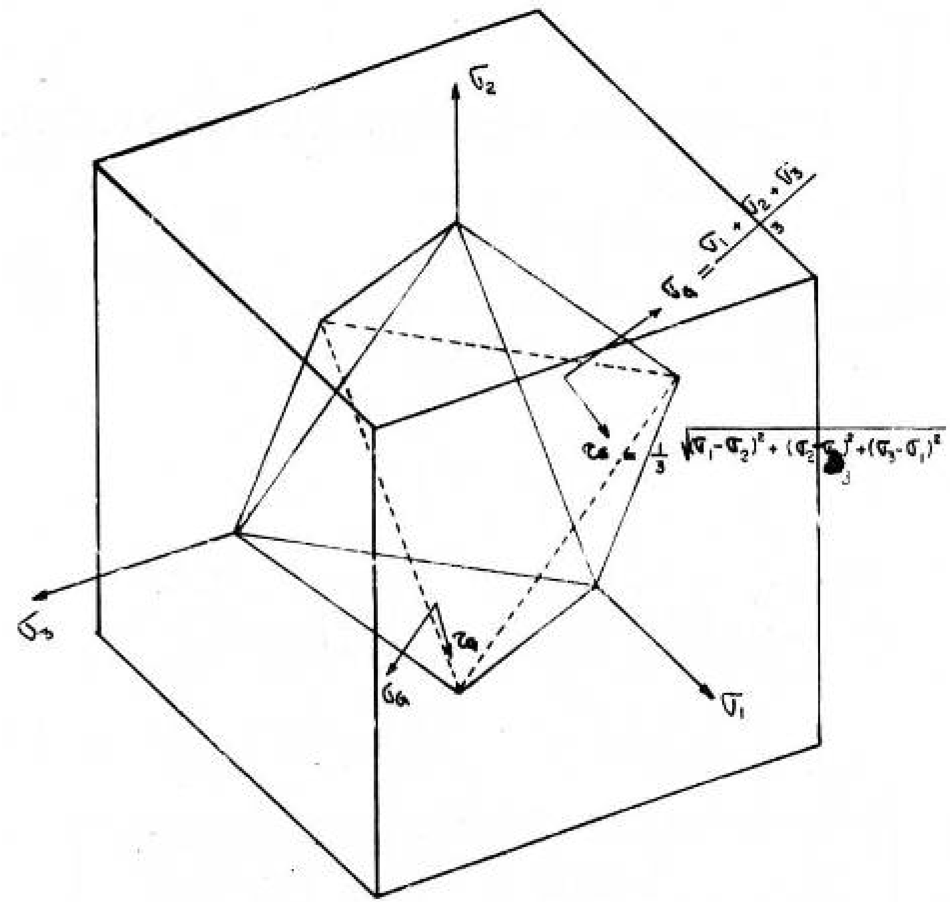
LÍNEAS ISÓCLINAS O ISOCLÍNICAS: o líneas lugares geométricos de los puntos en los que la tangente a la isostática forma un ángulo determinado con una dirección o eje fijo.

ESTADO TRIPLE DE TENSIONES



TENSIONES OCTAÉDRICAS

Tensiones que actúan en los planos octaédricos



Planos Octaédricos: Planos igualmente inclinados en relación a los ejes principales del punto considerado.

Cos α = cos β= cos γ= $\sqrt{3}/3$ α= β= γ= 54º 43`

CASOS PARTICULARES:

ESTADO DE CORTE PURO

ⓐ ESTADO TRIPLE:

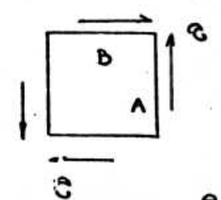
$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = 3\sigma_m = 0 \\ \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = \varepsilon_v = \dfrac{\sigma_m}{K} = 0\end{array}\right\}$$

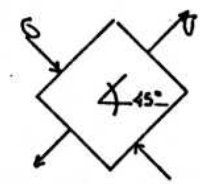
$$\varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E}\,\sigma_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1+\mu}{E}\,\sigma_2$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E}\,\sigma_3$$

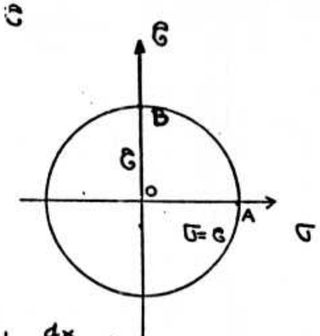
ⓑ ESTADO PLANO





$$\varepsilon_1+\varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E}\,\sigma_1 = -\frac{1+\mu}{E}\,\sigma_3$$

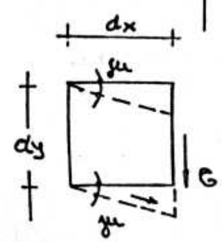


$$\varepsilon_v = \varepsilon_1+\varepsilon_3 = 0$$

$$\gamma_{max} = 2\varepsilon_1 = -2\varepsilon_3$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \varepsilon_1$$

$$\gamma_2 = 2\varepsilon_3$$



Próxima Clase: Criterios de Resistencia

Fin