UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

CURSO PREPARATORIO DE INGENIERÍA (CPI)

EJERCITARIO TEÓRICO DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

AÑO 2014

RECTAS - EJERCICIOS TEÓRICOS

1- Demostrar que la ecuación vectorial de una recta que pasa por los puntos "A" y "B" puede expresarse de la forma: $\vec{P} = (1-k)\vec{A} + k\,\vec{B}$ siendo k un escalar

2- Siendo las ecuaciones vectoriales de dos rectas $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{A_1} + k_1\overrightarrow{B_1}$ y $\overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{A_2} + k_2\overrightarrow{B_2}$ demostrar que si $\overrightarrow{B_1}.\overrightarrow{B_2} = 0$, las dos rectas son perpendiculares.

3- <u>Verificar la afirmación</u>: La ecuación vectorial de una recta perpendicular a un vector **B** y que pasa por un punto M está dada por la expresión: **P.B = M.B**

4- Siendo la expresión: $x^2 + y^2 + A_1\,x + B_1\,y + C_1 + k\,(x^2 + y^2 + A_2\,x + B_2\,y + C_2) = 0$, probar que ésta ecuación representa una recta, si $k = -1$.

5- Demostrar que si las rectas: $A_1\,x + B_1\,y + C_1 = 0$ y $A_2\,x + B_2\,y + C_2 = 0$ son perpendiculares, entonces se cumple la igualdad: $\frac{A_1}{B_1} + \frac{B_2}{A_2} = 0$

6- Demostrar que si dos rectas tienen sus pendientes iguales en valor absoluto pero de distintos signos, entonces podemos afirmar que sus ángulos de inclinaciones son suplementarios.

7- Determinar la pendiente de la recta: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

8- Dada la ecuación segmentaria de una recta: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, demostrar que su distancia al punto P(m; n) está dado por la expresión: $\delta = \frac{bm+ay-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

9- Escribir la ecuación normal correspondiente a la recta de ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

10- Comprobar que si la ecuación de una recta está dada de la forma segmentaria $\frac{x}{m} - \frac{y}{p} = 1$, entonces un vector direccional de la misma recta será de la forma: $\vec{V} = (m;\ p)$.

11- Determinar la pendiente de la ecuación normal de la recta: $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - d = 0$.

12- Probar que la distancia entre las rectas paralelas $y = m\,x + b_1$; $y = m\,x + b_2$se expresa de la forma: $d = \frac{b_1-b_2}{\sqrt{1+m^2}}$.

13- Demostrar que el área del triángulo determinado por los ejes coordenados cartesianos OX y OY, y por la recta cuya ecuación normal es de la forma $x.\cos\alpha + y.\operatorname{sen}\alpha - d = 0$, está dada por la expresión: $\frac{d^2}{sen2\alpha}$.

CIRCUNFERENCIAS - EJERCICIOS TEÓRICOS

1- Probar que la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 + x + y + p = 0$, es real si $p \leq ½$.

2- Cuál es la condición necesaria y suficiente para que el punto P(a; b) esté en el interior de la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2D\,x + 2E\,y + F = 0$

3- Dada la expresión: $x^2 + y^2 + A_1\,x + B_1\,y + C_1 + k\,(x^2 + y^2 + A_2\,x + B_2\,y + C_2) = 0$, demostrar que ésta ecuación es una circunferencia, si el valor de "k" es: $k \neq -1$.

4- Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + A\,x + B\,y + C = 0$, demostrar que si el punto $M(\alpha; \beta)$ está en su interior, se cumple la relación: $\alpha^2 + \beta^2 + A\,\alpha + B\,\beta + C < 0$

5- <u>Verificar</u>: Si la recta de ecuación $y = m\,x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, entonces se cumple la relación: $b = R\sqrt{1 + m^2}$.

6- <u>Comprobar</u>: Si la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ es tangente a la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, el valor del radio es: $R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

7- <u>Demostrar la siguiente afirmación</u>: Si por un punto $M(\alpha; \beta)$ exterior de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ se trazan tangentes a la misma, la ecuación de la recta que pasa por los puntos de tangencias está dada por: $\alpha\,x + \beta\,y = R^2$.

8- Comprobar que la ecuación de la familia de circunferencias tangentes a los ejes coordenados se puede expresar de la forma: $x^2 + y^2 - 2R\,x - 2R\,y + R^2 = 0$.

9- <u>Demostrar</u>: Siendo la recta de ecuación $y = m\,x$ tangente a la circunferencia de ecuación
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = k^2$, entonces un valor de "m" es: $m = \frac{2\,h\,k}{h^2 - k^2}$

10- Determinar la condición para que la recta: $y = x + p$ sea tangente a la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = R^2$

11- Demostrar que las circunferencias de ecuaciones:
$x^2 + y^2 - ax + ay = \frac{a^2}{2}$ y $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = a$, son secantes.

PARÁBOLAS - EJERCICIOS TEÓRICOS

1- Demostrar que si la distancia del foco a la directriz de una parábola es **p**, entonces la longitud de la cuerda mediatriz del segmento de recta cuyos extremos son el vértice y el foco de la misma, es: $\sqrt{2}\,p$

2- Determinar la ecuación de la cuerda perpendicular al eje de la parábola: $y^2 = 2\,p\,x$ de forma tal que el vértice de la parábola y los puntos de intersección de la cuerda con la parábola, sean los vértices de un triángulo equilátero. (Gráfico)

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

3- Demostrar que dos parábolas que tienen un eje común y un foco común situado entre sus vértices, se cortan formando un ángulo recto. (Gráfico)

4- Encontrar la longitud de la cuerda común de las parábolas $y^2 = 2\,p\,x$; $x^2 = 2\,p\,y$.

5- Demostrar que toda recta paralela al eje de una parábola cualquiera, intercepta a la misma en un solo punto. (Gráfico)

6- Explicar porqué si una recta intercepta a una parábola en un único punto, entonces: a) La recta es una tangente a la parábola ó b) La recta es una paralela al eje de la parábola.

7- Hallar la longitud de la cuerda determinada por la recta $y = x$ en la parábola $x^2 - 2a\,y - a^2 = 0$.

8- Verificar que un punto de la parábola de ecuación $x^2 = -2\,p\,y$, que equidista del foco y del vértice, es: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}p;\ -\frac{p}{4}\right)$.

9- Verificar que un punto de la parábola de ecuación $x^2 = -2\,p\,y$ que equidista del foco y del vértice, es: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}p;\ -\frac{p}{4}\right)$

10- <u>Demostrar</u>: La ecuación de una parábola tangente al eje de abscisas y cuyo eje es paralelo al eje de ordenadas, se puede expresar de la forma $x^2 + Bx + Cy + D = 0$.

11- Deducir la condición según la cual, la recta de ecuación $y = m\,x + k$ sea tangente a la parábola: $y^2 = 2\,p\,x$. (Gráfico)

12- Demostrar: se puede trazar una y solamente una tangente a la parábola $y^2 = 2\,p\,x$ que tenga pendiente $k \neq 0$. (Gráfico)

13- Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola de ecuación $y^2 = 4\,a\,x$, cuyo coeficiente angular es "m", es de la forma: $y = m\,x + \frac{a}{m}$.

14- Encontrar el valor de "b" para que la recta de ecuación $y = m\,x + b$ sea tangente a la parábola $x^2 = 2\,p\,y$.

15- Verificar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2\,p\,x$ en un punto $P(x_1 ; y_1)$ de ella está dada por: $y_1\,y = p\,(x + x_1)$

16- <u>Demostrar la siguiente afirmación</u>: Para que la recta $y = m\,x + b$ sea tangente a la parábola de ecuación $x^2 = 2\,p\,y$, $(p > 0)$ se deberá cumplir que: $b \leq 0$.

ELIPSES - EJERCICIOS TEÓRICOS

1- Calcular la distancia del centro de la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, a la cuerda de longitud "a" paralela a su eje mayor.

2- Demostrar que la distancia de un punto cualquiera P(x; y) de una elipse a uno de sus focos está dada por la expresión $r=\frac{c}{a}x\pm a$. Grafico

3- Demostrar que el valor numérico de la pendiente de la tangente a la elipse trazada desde uno de los puntos que son extremos de su lado recto, es igual a su excentricidad. Grafico

4- Determinar la excentricidad "e" de una elipse si:
a) Su eje menor se ve desde uno de sus focos formando un ángulo de 60°
b) El segmento entre los focos se ve desde los vértices del eje menor formando un ángulo recto
c) La distancia entre las directrices es el triple de la distancia entre los focos
d) El segmento de la perpendicular bajada desde el centro de la elipse a su directriz se divide por la mitad en el vértice de la elipse.

5- Por el foco de una elipse se traza una perpendicular a su eje mayor, siendo C el punto de intersección de esta perpendicular con la elipse que tiene centro en O. Si A y B son los puntos de intersecciones de los ejes con la elipse, determinar para que valor de la excentricidad de la elipse, serán paralelos los segmentos AB y OC.

6- Deducir las fórmulas para las áreas de los triángulos isósceles, tal que sus bases sean el lado recto de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, y sus vértices opuestos sean cada uno de los focos de la elipse dada. Grafico

7- Deducir la fórmula que determine el área de un triángulo rectángulo, tal que dos de sus vértices extremos de uno de sus catetos sean los focos de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, y el extremo del otro cateto sea un punto de la elipse dada. Grafico

8- Explicar porque si una elipse tiene su excentricidad igual a 0, entonces la elipse es una circunferencia.

9- Probar que si el segmento de recta determinado por el foco izquierdo de la elipse $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ y el extremo superior de su eje menor, tiene por pendiente **m**, entonces la excentricidad de la cónica es: $\mathrm{e}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{m}^2}}$

10- Dada la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, demostrar que el ángulo de inclinación de la recta que pasa por el vértice izquierdo del eje mayor y por el vértice superior del eje menor, expresado en función de su excentricidad, es de la forma: $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2-\mathrm{e}^2}}$

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

11- Demostrar que si la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ lo inscribimos en un rectángulo de lados 2a y 2b y trazamos sus diagonales, entonces las longitudes de las cuerdas formadas tendrán el valor: $2\sqrt{a^2+b^2}$

12- Explicar porqué una cuerda paralela al eje menor de la elipse de ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$y que dista de dicho eje una distancia t = b, tiene por longitud: $\frac{2\,b.c}{a}$

13-Demostrar que la longitud del segmento de recta cuyos extremos son los puntos extremos de cada uno de los ejes de la elipse de ecuación $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, se puede expresar en función de su excentricidad "e", de la forma: $a\sqrt{2-e^2}$

14- Demostrar que si F_1 y F_2 son los focos de la elipse de ecuación $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ y B es el extremo del eje menor, entonces el ángulo formado por las rectas F_1B y BF_2, en función de la excentricidad, es igual a: $\operatorname{arc\,tg}\frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}$

15- Demostrar que el producto de las distancias de los focos a cualquier tangente a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, es igual a: b^2

16- Demostrar que la distancia de un foco de una elipse a la directriz correspondiente a dicho foco, está dada por la expresión: $\frac{b^2}{c}$

17- Demostración: Dados los focos de una elipse F_1 y F_2, y B un punto extremo de su eje menor, Demostrar que si el ángulo formado por los segmentos de recta F_1B y BF_2 es igual a un recto, la excentricidad de la elipse es igual a: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18- Probar que para una elipse cualquiera, si la distancia de su centro a una de las directrices es cuatro veces la distancia entre sus focos, la excentricidad de la dicha elipse es igual a: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

19- Probar que si el vértice de una elipse se encuentra en el punto medio de la perpendicular trazada desde el foco a su directriz correspondiente, la excentricidad de dicha elipse es igual a 1

20- Demostración: Por el foco F de una elipse de centro O, se ha trazado una perpendicular a su eje mayor, siendo C el punto de intersección de ésta perpendicular con la elipse. Si A y B son respectivamente los extremos de los semi-ejes mayor y menor, el valor de la excentricidad de la elipse para que los segmentos de rectas AB y OC sean paralelos, deberá ser: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21- Probar que la pendiente de la recta que pasa por el extremo superior del lado recto de la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y por el centro de la misma, siendo e la excentricidad, está dada por la expresión: $\frac{1-e^2}{e}$

22- Demostrar que la longitud de la cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por el punto medio del semi-eje mayor de una elipse, es: $\sqrt{3}b$

23- Demostración: Dada la elipse de ecuación $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, entonces para que los focos y los extremos del eje menor formen un cuadrado, se deberá cumplir que: b = c.

24- Demostrar que el producto de las distancias de los focos a cualquier tangente de un elipse, es igual al cuadrado del semi eje menor. Grafico

25- Demostrar que la condición de tangencia de la recta de ecuación y = m x + q, con la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, está dada por la expresión $a^2 m^2 + b^2 = q^2$

26- Demostrar que la condición de tangencia de la recta de ecuación A x + B y + C = 0, con la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, está dada por la expresión $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

27- Si por el punto M(0; 2b) se trazan tangentes a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, demostrar que el ángulo formado por una tangente y el eje de abscisas (OX) es: $\text{arc tg}\,\sqrt{3}\,\frac{b}{a}$

HIPÉRBOLAS - EJERCICIOS TEÓRICOS

1- Para una hipérbola cualquiera, expresar el ángulo entre sus asíntotas, en función de su excentricidad.

2- Demostrar que la longitud del lado recto de una hipérbola es $L=\frac{2b^2}{a}$. Grafico

3- Demostrar que la distancia del foco de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a su asíntota es igual a b. Grafico.

4- Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ a sus dos asíntotas es una cantidad constante, igual a $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. Grafico.

5- Demostrar que área del paralelogramo que tenga como dos lados contiguos a las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y los otros dos lados que sean las rectas paralelas a las asíntotas trazadas desde un punto cualquiera de la hipérbola, es una cantidad constante e igual a $\frac{a.b}{2}$. Grafico

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

6- Comprobar que si una hipérbola es equilátera, su excentricidad es igual a: $\sqrt{2}$.

7- Verificar que si e_1 es la excentricidad de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y e_2 es la excentricidad de su conjugada, entonces la relación entre e_1 y e_2 está dada por: $e_1=\frac{e_2}{\sqrt{e_{2-1}^2}}$

8- Demostrar que si las asíntotas de la hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ son perpendiculares, entonces la hipérbola es equilátera

9- La ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=m$, representa en general a una hipérbole. Demostrar que si m tiende a 0, entonces la ecuación tiende a dos rectas no paralelas

10- Demostrar que la distancia entre las directrices de una hipérbole es igual a: $\frac{2a^2}{c}$

11- Probar que la ecuación de la tangente a la hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, trazada desde el punto M (x_0; y_0) de la misma, está dada por: $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

12- Dada la ecuación x y = k^2 que representa una hipérbola equilátera, demostrar que el valor de sus semiejes es $k\sqrt{2}$.

13- Determinar los puntos de intersecciones de la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=k$ y la hipérbole equilátera x y = $\frac{k}{2}$.

14- Demostrar que si una hipérbole cuyo eje real es paralelo al eje de abscisas tiene excentricidad e = 2, entonces sus asíntotas forman ángulos de 60^0 con el eje 0X.

15- La distancia de un foco de una hipérbola a una de sus asíntotas es igual a semi eje imaginario

16- Demostrar que si la semi-distancia focal de una hipérbola es igual a la suma de sus semi ejes, entonces la ecuación de la hipérbola se transforma en una recta.

17- Probar que si por un punto P de una hipérbola se trazan rectas que pasan por sus respectivos focos F_1 y F_2, entonces la tangente a la hipérbola trazada por el punto P, es bisectriz del ángulo F_1PF_2.

COORDENADAS POLARES - EJERCICIOS TEÓRICOS

RECTAS

1- Dada la ecuación de una recta en coordenadas polares: $\rho = \dfrac{d}{\cos(\theta - \alpha)}$ y un punto: $A(\rho_1;\ \theta_1)$, determinar una expresión que indique la distancia del punto a la recta. Gráfico.

2- Demostrar que la ecuación en coordenadas polares $\rho = \frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$ representa una recta distante $\frac{\sqrt{2}}{2}$ del polo, formando un ángulo de 135° con el eje polar.

3- Demostrar que la ecuación polar de la recta que pasa por los puntos $A(b;\ 0)$ y $B(b;\ \pi/2)$ está expresada por: $\rho\ (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = b$

4- Demostrar que la ecuación polar de una recta que pasa por el punto $M(a;\ \alpha)$ y forma un ángulo β con el eje polar es: $\rho \operatorname{sen}(\theta - \beta) = a \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

5- Comprobar que si la ecuación de una recta está expresada en forma segmentaria $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, entonces, en un sistema de coordenadas polares donde el polo coincide con el origen cartesiano y el eje polar coincide con el eje positivo de ordenadas, la ecuación de ésta recta será: $\rho = \frac{ab}{-b\operatorname{sen}\theta + a\cos\theta}$

6- Verificar que la ecuación polar de una recta que pasa por el polo y forma un ángulo α con el eje polar, puede ser expresada de la forma: $\theta = \alpha$; $\theta = \pi + \alpha$

7- Probar que la ecuación polar de una recta que pasa por el punto $M(a;\ \alpha)$ y forma un ángulo β con el eje polar, se puede expresar de la forma: $\rho \operatorname{sen}(\theta - \beta) = a \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

CIRCUNFERENCIAS

8- Demostrar que la ecuación polar de la circunferencia que pasa por el polo y por los puntos $A(b;\ 0)$ y $B(b;\ \pi/2)$ esta dada por la expresión: $\rho = b\ (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$.

9- Demostrar que la ecuación polar de una circunferencia de radio "r", tangente al eje polar y a la recta perpendicular al eje polar que pasa por el polo, se puede expresar de la forma:
$\rho^2 - 2\,r\,\rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + r^2 = 0$ (gráfico)

10- Probar que la ecuación polar de la tangente a la circunferencia $\rho = R$ en el punto $(R;\ \alpha)$ está dada por la expresión: $\rho\cos\theta\cos\alpha + \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha = R$.

11- Probar que la ecuación polar de la tangente trazada desde el punto $A(3R;\ 0°)$ a la circunferencia $\rho = 2\,R\cos\theta$ está dada por la expresión: $\rho = \frac{3\,R}{2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}$.

12- Verificar que la ecuación $\rho^2 + 3\,R^2 - 4\,R\,\rho\cos(\theta - \pi/6) = 0$, representa una circunferencia tangente al eje polar en el punto $T(\sqrt{3}\,R;\ 0°)$

13- Si el eje de un sistema de coordenadas polares es paralelo al eje de ordenadas pero de sentido contrario, y el polo se encuentra con relación al eje cartesiano en P(a; 0), demostrar que la ecuación de la circunferencia en coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 = a^2$, será en coordenadas polares de la forma: $\rho = -2\,a\operatorname{sen}\theta$

PARÁBOLAS

14- Dada la ecuación de la parábola en coordenadas polares $\rho = \frac{p}{1-\cos\theta}$ (p > 0), demostrar que el punto de la curva más cercano al polo es: $(\frac{p}{2};\ \pi)$

15- Dada la ecuación de la parábola en coordenadas polares $\rho = \frac{p}{1-\cos\theta}$ (p > 0), demostrar que el punto de la curva distante "p" unidades del polo es: $(p; \frac{\pi}{2})$.

16- Probar que la ecuación polar de una parábola con vértice en el polo y cuyas ramas siguen el mismo sentido que el eje polar, es de la forma: $\rho^2\cos^2\theta = \rho^2 + p^2 - 2\,p\,\rho\cos\theta$.

17- Demostración: Si la ecuación $\rho = \frac{p}{1-\cos\theta}$ representa la ecuación polar de una parábola, entonces podemos afirmar que el punto que dista $\sqrt{3}\,p$ del eje polar, tiene por coordenadas polares: $\left(2\,p;\ \frac{\pi}{3}\right)$.

18- <u>Demostración</u>: Si la ecuación $\rho = \frac{p}{1-\operatorname{sen}\theta}$ representa la ecuación polar de una parábola, entonces podemos afirmar que la cuerda focal de pendiente $\sqrt{3}$, tiene por longitud: 8 p.

ELIPSES

19- <u>Demostración</u>: La ecuación $\rho = \frac{p.e}{1-\cos\theta}$ representa la ecuación polar de una elipse, donde "e" es la excentricidad (e<1). Demostrar que la cuerda focal mínima es igual a 2 p.e.

HIPÉRBOLAS

20- Probar que si la ecuación polar de una hipérbola está dada por la expresión $\rho = \frac{pe}{1-e\cos\theta}$, donde el polo coincide con el foco y el eje polar es un eje horizontal dirigido hacia la derecha; siendo e > 1 la excentricidad y p la distancia del foco a la directriz, entonces el centro de esta hipérbola tiene por coordenadas: $(\frac{pe^2}{e^2-1};\ \pi)$.

21- Probar que si la ecuación polar de una hipérbola está dada por la expresión $\rho = \frac{pe}{1-e\cos\theta}$, donde el polo coincide con el foco y el eje polar es un eje horizontal dirigido hacia la derecha; siendo e > 1 la excentricidad y p la distancia del foco a la directriz, entonces el otro foco de esta hipérbola tiene por coordenadas: $\left(\frac{2\rho e^2}{e^2-1};\ \pi\right)$.

22- Demostración: La ecuación $\rho = \frac{p\,e}{1-e\cos\theta}$ representa la ecuación polar de una hipérbola donde el polo coincide con el foco y el eje polar es un eje horizontal dirigido hacia la derecha; siendo e > 1 la excentricidad y p la distancia del foco a la directriz. Entonces, si la hipérbola fuera equilátera la ecuación seria: $\rho = \frac{2\,p}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\theta}$.