UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

CURSO PREPARATORIO DE INGENIERÍA (CPI)

EJERCITARIO DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

(ÁLGEBRA VECTORIAL - TEORÍA)

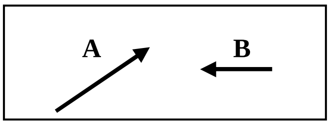
AÑO 2014

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

ÁLGEBRA VECTORIAL - EJERCICIOS TEÓRICOS

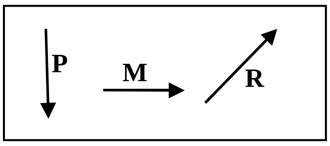
OPERACIONES GEOMÉTRICAS/GRÁFICAS CON VECTORES

1- Dado los vectores **A** y **B** indicados en el gráfico, construir los siguientes vectores:
a) **A + B** ; b) **A – B** ; c) **B – A** ; d) **– A – B**



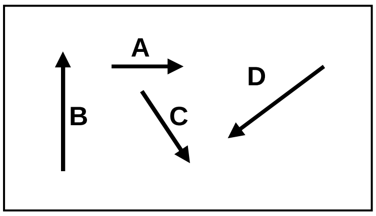
2- Conociendo los vectores**A y B**construir en forma gráfica los vectores:
a) **3ª** b) **– ½ B** c) **2A + ½B**

3- Dados los vectores de la figura, encontrar los vectores:
a)2**P** – **M** b) **M** – 2(**P** + **R**) c) 3**R** – **P**

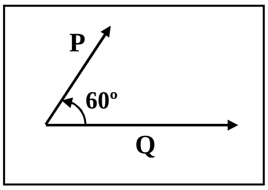


4- Demostrar gráficamente que: **–(A – B) = – A + B**

5- Dados los vectores **A, B, C** y **D** representados en la figura, construir los vectores:
a) **C** + 2 (**A** – **B** + ½ **D**)
b) 3**A** – 2**B** – (**C** – **D**)
c) –2**B** –**(C** – **2A)**

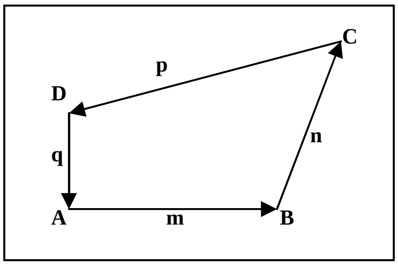


6- Sabiendo que los vectores **Q** y **P** forman un ángulo de 60°, determinar el ángulo formado por los vectores indicados abajo, en el orden dado y en el sentido positivo del ángulo (el sentido positivo del ángulo se toma el giro contrario a las manecillas del reloj).



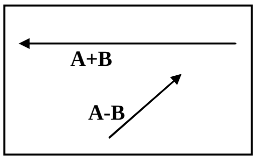
a) **P** y **–Q** b) **Q** y **–P** c) **–P** y **–Q** d) -**2Q** y **2P**

7- En el cuadrilátero ABCD de la figura, se dan los vectores que coinciden con sus lados: **AB = m ;BC = n ; CD = p ; DA = q.** Construir los vectores siguientes:
a) **m + n + p**
b) **p – q + m**
c) **n + 2q – p**



8-En el triángulo ABC el vector **AB**=**m** y el vector **AC**=**n**. Construir en forma gráfica los vectores siguientes:
a) $\frac{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{2}$; b) $\frac{\mathbf{m}-\mathbf{n}}{2}$; c) $\frac{\mathbf{n}-\mathbf{m}}{2}$; d) $-\frac{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{2}$.
Luego, tomando como unidad de medida el valor de $\frac{1}{2}|\mathbf{n}|$, construir los vectores:
e) $|\mathbf{n}|.\mathbf{m} + |\mathbf{m}|.\mathbf{n}$; f) $|\mathbf{n}|.\mathbf{m} - |\mathbf{m}|.\mathbf{n}$

9- Sabiendo que los vectores de la figura representan la suma y deferencia de los vectores**A** y **B**,Hallar gráficamente estos vectores.



10-Calcular el ángulo obtuso formado por las medianas trazadas desde los vértices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles.

11-Hallar el ángulo agudo formado por dos diagonales de un cubo

12-Demostrar que la suma de dos vectores unitarios produce un vector que tiene la dirección de la bisectriz del ángulo formado por los vectores componentes.

13- Demostrar gráficamente que: **– (A – B) = – A + B**

14-Demostrar en forma gráfica que si **P** = **A** + **B**, siendo **A** y **B** vectores no nulos, entonces |**P**|≤|**A**| + |**B**|

15- Demostrar en forma gráfica que: dos vectores de diferentes módulos, nunca darán como resultante un vector nulo.

16- Siendo los vectores **A**; **B** y **C**, tales que **A** = **B** + **C** . Demostrar que si $|\vec{A}| > |\vec{B}|$ y $|\vec{A}| > |\vec{C}|$ entonces el ángulo formado por los vectores **B** y **C** será menor ó igual que un recto.

17-Demostrar que si los vectores **A** ,**B** y **C** cumplen con las condiciones $\vec{A}–\vec{B} = \vec{C}$ y $|\vec{A}|–|\vec{B}| = |\vec{C}|$, entonces ellos son colineales y del mismo sentido.

18- ¿Porqué si un vector es paralelo a un eje cartesiano su componente sobre ese eje es del mismo valor que su módulo?

19- Indicar porqué los vectores unitarios: **i** ;**j** y **k** no tienen unidades de medidas y describen direcciones en el espacio.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL ENTRE VECTORES

1- Formula una condición sobre los escalares: a, b, c y d; para que los vectores: {(a; b), (c; d)}, sean linealmente independientes.

2- Sabiendo que los vectores no nulos $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$, son ortogonales entre sí, es decir: $\mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 . \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 . \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3 . \mathbf{v}_4 = 0$, determinar si los mismos son linealmente dependientes ó independientes.

3- Sabiendo que los vectores P y Q son Linealmente Independientes (LI), determinar los valores de “k” para que los vectores (P + Q) y (P –kQ) sean también Linealmente Independientes (LI).

4- Dados los vectores no nulos linealmente independientes: **A** y **B** del espacio de tres dimensiones, determinar si los vectores: **A** ; **B** y **A**+**B**son LI.

5- Siendo **u; v; w** tres vectores linealmente independientes, demostrar que: **(u + v) ; (u – v) y (u – 2 v + w),** también son linealmente independientes.

6- Demostrar que: dado un conjunto de vectores no nulos en el espacio de dos dimensiones, entonces tres vectores siempre serán Linealmente Dependientes (LD)

DEMOSTRACIONES POR MEDIO DEL ÁLGEBRA VECTORIAL

1- Demostrar que en un triángulo cualquiera, la recta que une los puntos medios de dos lados, es paralela al tercer lado e igual a la mitad.

2- Demostrar vectorialmente que el vector que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio, es paralelo a las bases e igual a la mitad de la suma de las bases.

3- Siendo **A** y **B** dos vectores no paralelos situados en un plano, demostrar las desigualdades:
a) $|\mathbf{A+B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ b) $|\mathbf{A-B}| \geq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$

4- Demostrar la desigualdad: $|\mathbf{A+B+C}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|$

5- ¿Que condiciones deben satisfacer los vectores **A** y **B** para que existan las siguientes relaciones?
a) $|\mathbf{A+B}| = |\mathbf{A-B}|$ b) $|\mathbf{A+B}| > |\mathbf{A-B}|$ c) $|\mathbf{A+B}| < |\mathbf{A-B}|$

6- Demostrar la igualdad vectorial: **OA + OB + OC = OP + OQ + OR**, siendo O un punto interior cualquiera del triángulo ABC y P, Q, R los puntos medios de los lados AB, BC, CA, respectivamente.

7- Determinar la condición que debe cumplir el vector **A + B** , para que su dirección sea la de la bisectriz del ángulo formado por los vectores **A** y **B.**

8- Siendo ABCD un paralelogramo,demostrar: $\mathbf{AB}^2+\mathbf{BC}^2+\mathbf{CD}^2+\mathbf{DA}^2=\mathbf{AC}^2+\mathbf{BD}^2$

9- Siendo ABCD un cuadrilátero cualquiera y P y Q los puntos medios de sus diagonales, demostrar: $\mathbf{AB}^2+\mathbf{BC}^2+\mathbf{CD}^2+\mathbf{DA}^2=\mathbf{AC}^2+\mathbf{BD}^2+4\mathbf{PQ}^2$

10- Sean A, B, C los vértices de un triángulo cualquiera cuyos lados están representados por los vectores: **a** (vector **BC** opuesto al vértice A); **b** (vector **CA** opuesto al vértice B) y **c** (vector **AB** opuesto al vértice C). Demostrar el teorema del coseno: $\mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{a}.\mathbf{b}.\cos C$.

11- Sean A, B, C los vértices de un triángulo cualquiera cuyos lados están representados por los vectores: **a** (vector **BC** opuesto al vértice A); **b** (vector **CA** opuesto al vértice B) y **c** (vector **AB** opuesto al vértice C). Demostrar el teorema del seno: $\frac{\mathrm{sen}A}{|a|}=\frac{\mathrm{sen}B}{|b|}=\frac{\mathrm{sen}C}{|c|}$

12- Para los vectores: **A**; **B**; **C** y **D** se conocen las relaciones: **A∧B = C∧D** y **A∧C = B∧D** , Demostrar que los vectores: (**A – D**) y (**B – C**) son colineales.

13- Demostrar que los vectores: **A** = **P∧N** ;**B** = **Q∧N** ; **C** = **R∧N** , son coplanares (es decir, teniendo un origen común, están situados en un mismo plano)

PRODUCTO ESCALAR

1- Demostrar que el ángulo inscripto en una semicircunferencia en un ángulo recto.

2- Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

3- Sea "X" el producto escalar de los vectores "**A**" y "**B**", (X = **A.B**), demostrar que: si **A**y **B**son vectores opuestos, entonces X < 0.

4- Si el módulo de un vector es el doble del módulo de otro vector (|**A**| = 2 |**B**|), para que los vectores: (α**A** + β**B**) y (α**A** − β**B**) sean perpendiculares, demostrar que la relación α/β debe ser igual a: ± ½

5- Demostrar que si $\vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{A}\,.\,\vec{C}$, entonces $\left|\vec{B}\right|$ es proporcional al $\left|\vec{C}\right|$.

6- Explicar porqué, si el producto escalar de dos vectores es igual a 1, los dos vectores pueden ser unitarios y paralelos.

PRODUCTO VECTORIAL

1- Dados dos vectores no nulos, demostrar que su producto escalar multiplicado por su producto vectorial es un vector perpendicular a los vectores dados.

2- Los vectores **A, B** y **C**, satisfacen la condición: **A+B+C=0;** demostrar que: **AxB=BxC=CxA**

3- Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ representan a dos lados adyacentes de un rombo, demostrar que el área del rombo está determinada por: $\frac{1}{4}\left|\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\wedge\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\right|$

4- Explicar porqué producto vectorial de dos vectores unitarios, es otro vector cuyo módulo es menor ó igual a uno.

PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

1- Siendo los vectores no nulos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ perpendiculares y $\vec{C} = \vec{A}\wedge\vec{B}$, demostrar que $\vec{A}.\vec{B}\wedge\vec{C} \neq 0$

2- Sabiendo que los vectores **A** y **B** son perpendiculares y que se cumple la relación $\vec{P}\wedge\vec{B} = \vec{A}-\vec{P}$, demostrar que $\vec{P}$ es perpendicular a $\vec{B}$

3- Sabiendo que los vectores unitarios **A** y **B** son perpendiculares y que se cumple la relación $\vec{P}\wedge\vec{B} = \vec{A}-\vec{P}$, demostrar que el módulo del vector **P** es $|\vec{P}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4- Indicar porqué el producto mixto de tres vectores unitarios coplanares es cero.

5- Si el producto mixto de tres vectores no nulos es igual a cero, demostrar que los tres vectores son linealmente dependientes (LD).

6- Si α,β yδson escalares, demostrar que el producto mixto de los vectores$(\vec{A}+\alpha\vec{B})$; $(\vec{B}+\beta\vec{C})$; $(\vec{C}+\delta\vec{A})$está dado por la expresión $(1+\alpha\beta\delta)\vec{A}\vec{B}\vec{C}$

7- Demostrar que $(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{B}+\vec{C})\wedge(\vec{C}+\vec{A}) = 2\,\vec{A}.\vec{B}\wedge\vec{C}$

8- Explicar que si se cumple la igualdad $\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{A}\wedge\vec{C}$, entonces $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son coplanares.

9- Dados los vectores: **P, Q, R** y **N**, demostrar que los vectores: **A=P∧N ; B**=**Q∧N** y **C** = **R∧N**, si tienen un punto común, entonces se encuentran en un mismo plano.