UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

CURSO PREPARATORIO DE INGENIERÍA (CPI)

EJERCITARIO DE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

(ÁLGEBRA VECTORIAL - PRÁCTICA)

AÑO 2014

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

ÁLGEBRA VECTORIAL - EJERCICIOS NUMÉRICOS

VECTORES DE POSICIÓN – OPERACIONES ANALÍTICAS CON VECTORES

1- La longitud "d" de un segmento es igual a 5, su proyección sobre el eje de abscisas es igual a 4. Hallar la proyección de este segmento sobre el eje de ordenadas, si forma sobre el eje de ordenadas: a) un ángulo agudo; b) un ángulo obtuso.

2- La longitud del segmento **MN** es igual a 17, su extremo está en el punto N(−7; 3), y la proyección sobre el eje de ordenadas es igual a 15. Hallar las coordenadas del origen de éste segmento si se sabe que forma con el eje de abscisas: a) un ángulo agudo; b) un ángulo obtuso.

3- Sean los vectores: **X** = 3 **i**– 2 **j** + 4 **k** ; **Y** = –**i**–**j** + **k** ; **Z** = **i**– 3 **j**– 2 **k** , determinar los vectores:
a) **X** + **Y** + **Z** ; b) – **X** + **Y**–**Z** ; c) **X**–**Y**–**Z**

4- Dado los vectores: **P** = 3 **i**– 2 **j** + 4 **k** ; **Q** = –**i**–**j** + **k** ; **R** = **i**– 3 **j**– 2 **k** ; determinar los vectores:
a) 2 **P** + 3 **Q** ; b) **P**– 2 **Q** + 5 **R** ; c) **Q**– 2 **P**

5- Sean los vectores de posición **P = 2 i + 3 j – k** y **Q= 4 i – 3 j + 2 k**; determinar los vectores: a) **PQ** b) **QP**

6- Dados los puntos: A(–1; 3); B(2; 5) y C(3; –1), calcular:

a) **OA – AB** b) **OC – BC** c) **3 BA – 4 CB**

7- Conociendo los vectores de posición: **A** = (–1; 3); **B** = (1; 0) y **C** = (2; –1), encontrar el vector de posición **D**, tal que se cumpla: **DC = BA**

8- Dados los puntos A(–1; 2; 3) y B(4; –2; 0), determinar un vector de posición **P**, tal que se cumpla: **AP = 3 AB**

9- Determinar los números *a* y *b* de tal forma que los vectores: **P**=(4; 1; –3) y **Q**=(6; a; b) sean paralelos

10- Conociendo los vectores: **X = i – 2j + k** ; **Y = 2i – 4k ;** **Z = – 4 i – 4 j + 14k,** hallar los valores de a y b para que: **Z = a X + b Y**

11- Determinar para que valores de α y β los vectores: **A=–2i+3j+**β**k** y **B=**α**i–6j+2k** son colineales

12- Verificar si los puntos: A(3; –1; 2); B(1; 2; –1); C(–1; 1; –3); D(3; –5; 3) son vértices de un trapecio.

13- Dados los puntos A(–1; 5; –10); B(5; –7; 8); C(2; 2; –7); D(5; –4; 2) demostrar que los vectores **AB** y **CD** son colineales y determinar como tienen sus sentidos.

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

14- Para qué valores de m y n los puntos P(3; 1; –2); Q(1; 5; 1) y R(m; n; 7) estarán en la misma línea recta.

15- Dados los puntos: A(3; –1; –2) , B(2; –3; 1) y C(–1; 2; –3) , determinar un punto "D", tal que se cumpla la relación: $\overrightarrow{AD} = 2.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

16- Hallar las coordenadas de un punto "P" que esté situado sobre el eje de ordenadas (eje OY), y de forma tal que su distancia al punto A(2; 3) sea el doble de su distancia al punto B(–1; –2)

17- Siendo **P** y **Q** dos vectores no paralelo y sabiendo que:
A = (x +4y)**P** + (2x + y +1)**Q** ; **B =** (y – 2x + 2)**P** + (2x – 3y + 1)**Q**
Hallar los valores de x e y para que: **3A = 2B**

18- Los vectores: **B** = 2**i** + 2**j** – 2**k** y **H** = 3**i** − 2**j** + **k** representan respectivamente a la base y la altura de un triángulo isósceles. Determinar los ángulos del triángulo.

19-Dados los vértices de un triángulo A(2; –1; 4), B(3; 2; –6) y C(–5; 0; 2), calcular la longitud de la mediana trazada desde el vértice A

20- Hallar el versor de igual dirección que el vector **A** = (3; 4; –12)

21- Dados los puntos en el espacio F(1; 2; 3); G(–6; –2; 3) y H(1; 2; 1); determinar el vector unitario que tenga la misma dirección y sentido contrario al vector: 3**GF**–2**GH.**

22- Hallar el versor de igual dirección que el vector **A =** 6**i** –2**j** –3**k**

23- Sobre un cuerpo puntual actúan las fuerzas:
F = 2 **i +** 3 **j** –5 **k** ; **G =** –5 **i + j +** 3 **k** ; **H = i** –2 **j +** 4 **k** ; **M =** 4 **i** –3 **j** –2 **k**
Determinar: a) la fuerza resultante b) el módulo de la resultante

24- Conociendo el vector **C =** 16 **i** –15 **j** +12 **k**, determinar un vector **D**, que sea paralelo y de sentido opuesto al vector **C**, y que tenga módulo $|$**D**$|$ = 75

25- Dados los vectores $\vec{P} = 2i - j + 5k$ y $\vec{Q} = 2i - 3j + 2k$, hallar un vector $\overrightarrow{A}$ que tenga módulo $|\vec{A}|$ =18 y sea de la misma dirección y sentido contrario al vector: $\vec{Q} + \vec{P}$

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

1- Demuestre que los vectores:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad V_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad V_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

sonL D, mientras que el conjunto de vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4$, es L I.

2- Demuestre que los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ son L I

3- Demostrar que los vectores: **A** = (1; 1; 1) ,**B** = (–2; 0; 3) y **C** = (2; 0; –1) pueden formar una base en el espacio de tres dimensiones y escribir el vecto**V** = 2 **i** + 3 **j**–**k** en dicha base.

4- Demostrar que los vectores: **A** = (1; 1; 1), **B** = (0; –2; 3) y **C** = (2; 0; –1) pueden formar una base en el espacio de tres dimensiones y escribir el vector unitario **k** en dicha base.

5- Demostrar que los vectores: **A** = (1; 1; 1) ,**B** = (–2;–2; 3) y **C** = (2; 0; –1) pueden formar una base en el espacio de tres dimensiones y escribir el vector unitario **j** en dicha base.

6- Encontrar la condición que deben satisfacer los valores de “a” ; “b” y “c” para que el vector **W** = (a; b; c) sea LD a los vectores: **A** = (1; –3; 2) **B** = (2; –1; 1)

7- Dado dos vectores en un plano: **P = (2; –3)** y **Q = (1; 2)**, hallar la descomposición lineal del vector **A = (9; 4)** en función de los vectores **P** y **Q**.

8- Dados tres vectores en el plano **A = (3; –2); B = (–2; 1)** y **C = (7; –4),** determinar la descomposición lineal de cada uno de estos tres vectores, tomando por base a los otros dos.

9- Se dan tres vectores: **A = (3; –1); B = (1; –2)** y **C = (–1; 7).** Determinar la descomposición del vector **P = A + B + C** mediante la base **A, B**.

10- En cada uno de los casos siguientes determinar si los vectores son o no linealmente dependientes:

a)**A = 2i + j –3k ;** **B = i –4k ;** **C = 4i +3j –k**

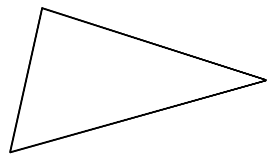
b)**A = i –3 j +2k ;** **B = 2 i –4j + k ;** **C = 3i +2j –k**

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

PUNTOS DE DIVISIÓN DE SEGMENTOS

1- Dados los puntos $A(2; -5; 3)$ y $B(-4; 1; 1)$, determinar las coordenadas del punto medio del segmento AB

2- Los vértices de un triángulo son los puntos $A(3; -2; 3)$; $B(-1; 2; 3)$ y $C(-5; 0; -1)$. Determinar las coordenadas de los puntos medios de sus lados.



3- Conociendo el punto medio de un segmento $M(3; -4; 5)$, y uno de sus extremos $A(-1; 2; -4)$, hallar las coordenadas del otro extremo.

4- Hallar el punto simétrico de $A(0; -1; 2)$ con relación al punto $M(7; -1; 1)$.

5- Conociendo los puntos $M(-1; 2; 0)$ y $N(-1; -2; 4)$, determinar las coordenadas del punto P que esté situado en el segmento MN y a una distancia $MP = \frac{1}{4} MN$.

6- Determinar las coordenadas de los extremos del segmento de recta que es dividido en tres partes iguales por los puntos $P(2; 0; 2)$ y $Q(5; -2; 0)$.

7- El segmento de recta AB está dividido por la mitad en el punto $P(-1; 3; -2)$ y uno de sus extremos es el punto $A(-3; 0; 5)$. Hallar las coordenadas del otro punto extremo.

8- Los puntos: $A(-1; 2; -3)$; $B(2; 4; -5)$ y $C(-6; 2; -3)$ son tres vértices de un paralelogramo. Determinar las coordenadas del cuarto vértice opuesto al punto A.

9- Los puntos $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ y $C(8; 2)$ son vértices consecutivos de un rombo. Determinar las coordenadas del cuarto vértice "D".

10- Dados dos vértices adyacentes de un paralelogramo: $A(-3; 5)$ y $B(12; 7)$ y el punto de intersección de sus diagonales $M(1; 1)$, determinar los otros dos vértices.

PRODUCTO ESCALAR

1- Dados los vectores $\mathbf{A} = (4; -2; -4)$ y $B = (6; -3; 2)$, calcular:
a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ b) $2\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} + 2\mathbf{B})$ c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$

2- Dados los vectores $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = 6\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{j}$, determinar:
a) $|A|$ b) $|B|$ c) $|A + B|$ d) $|A - B|$

3- Hallar el módulo de la suma y de la diferencia de los vectores: $\mathbf{P} = (3; -5; 8)$ y $\mathbf{Q} = (-1; 1; -4)$

4- Siendo $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\,\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = -2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$, hallar:
a) $2\,\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\,\mathbf{C}$ b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$ c) $|3\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{B} + 4\,\mathbf{C}|$
d) un vector unitario con la dirección y sentido del vector $3\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{B} + 4\,\mathbf{C}$

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

5- Verificar si los puntos A(1; 0; –2); B(3; 5; –3); C(2; 7; 5) son vértices de un triángulo rectángulo.

6- Demostrar que los puntos: A(0; 1; 1) ; B(4; 2; 1) y C(1; 3; 0) son vértices de un triángulo rectángulo.

7- Demostrar la "Propiedad distributiva del producto escalar, con respecto a la suma": **A.(B + C) = A.B + A.C**

8- Dados los vértices de un triángulo: M(3; 2; – 3) , P(5; 1; – 1) y Q(1; – 2; 1) , determinar el ángulo externo al vértice M.

9- Determinar las componentes de un vector **M** perpendicular a:**A**=(2; 3;–1) y **B**=(1;–2; 3), sabiendo que se cumple la relación**M.C** = –6, si **C** = (2; –1; 1).

10- Hallar el trabajo que realiza la fuerza **M** = 5 **i**– 3 **j** + 7 **k** al desplazar un punto material desde el punto P(–7; 4; –2) hasta el punto Q(2; –5; 4).

11- Que condición deben satisfacer los vectores **A** y **B** para que el vector **A + B** sea perpendicular al vector **A – B.**

12- Los vectores **A =** (2; –3; 6)y **B =** (–1; 2; –2), están aplicados a un mismo punto.Hallar las coordenadas del vector **C,** que tenga la dirección de la bisectriz del ángulo formado por **A** y **B**, y que $|\mathbf{C}| = 3\sqrt{42}$.

13- Los vectores **A** y **B** son perpendiculares entre sí; el vector **C** forma con cada uno de ellos un ángulo de 60°; si $|\mathbf{A}|$=3; $|\mathbf{B}|$= y $|\mathbf{C}|$=8, calcular: a) **(3A – 2B).(B + 3C)** b) $(\mathbf{A + B + C})^2$ c) $(\mathbf{A + 2B – 3C})^2$

14- Determinar un vector **V** tal que sea paralelo al vector **Q =** (1; –1; 2)y se cumpla la relación: **V . Q = –** 18

15- Sabiendo que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$determinar para que valor de m los vectores: **(**m**A + B)** y **(A –** m**B)**son perpendiculares entre sí.

16- Se dan los vértices de un cuadrilátero: A(1; –2; 2); B(1; 4; 0), C(–4; 1; 1) y D(–5; –5; 3). Demostrar que las diagonales AC y BD son perpendiculares.

17- Calcular el ángulo entre los vectores: **M = 2 i – 4 j + 4 k** y **N = – 3 i + 2 j + 6 k**

18- Calcular el módulo de los vectores **A + B** y **A – B** , conociendo: $|\mathbf{A}|$ = 4, $|\mathbf{B}|$ = 3 y el ángulo entre ellos: α = 60°

19- Dados los vectores unitarios **X, Y, Z**, que satisfacen la condición:**X + Y + Z = 0,** calcular: **XY + YZ + ZX.**

20- Sabiendo que $|\mathbf{U}|$ = 2, $|\mathbf{V}|$ = 3, y que estos vectores forman un ángulo de 135°, determinar: $|\mathbf{(2U – V).(U – 2V)}|$**.**

21- Determinar el Lugar Geométrico de los extremos de un vector variable "**X**", si su origen está en el punto A(−2; 3; 2) y el vector satisface la condición:**X**.**A** = 5. Siendo **A** el vector de posición del punto A.

22- Determinar el Lugar Geométrico de los extremos de un vector variable "**X**", si su origen está en el punto A y el vector satisface las condiciones siguientes: **X**.**A**=1; **X**.**B**=−4. Siendo **A** y **B** los vectores de posición de los puntos A(1; −3; 2) y B(0; 5; −1).

23- Una fuerza definida por el vector **R** = (1; −8; −7), se ha descompuesto en tres direcciones perpendiculares entre sí, una de las cuales es el vector **A** = 2**i** + 2**j** + **k**. Determinar la componente de la fuerza **R** en la dirección del vector **A**.

24- Dado los vértices de un triángulo A(2; –1; –3), B(1; 2; –4) y C (3; –1; –2), calcular las componentes del vector $\vec{\mathbf{h}}$ que sea colineal con la altura bajada desde el vértice A al lado opuesto, sabiendo además que el vector $\vec{\mathbf{h}}$ forma con el eje OY un ángulo obtuso y su módulo es igual a $2\sqrt{34}$

25- Dado el triangulo de vértices A(–3;1;2), B(–3;1;3) y C(–1;–2;4) y siendo P el pie de la perpendicular trazada al lado AC por el vértice B, hallar las componentes del vector **BP**.

26- Determinar las componentes de la proyección del vector **P** = (4; −3; 2) sobre una recta que forme ángulos iguales con los ejes coordenados.

27-Determinar el vector proyección del vector: **M** = 4**i** - 3**j** + **k**, sobre la recta que pasa por los puntos: A(2; 3; −1)y B(−2; −4; 3)

PRODUCTO VECTORIAL

1- Dados los vectores **A = (3; – 1; – 2)** y **B = (1; 2; –1)**. Hallar los productos vectoriales:
a) **AxB** b) **(2A + B)xB** c) **(2A – B)x(2A + B)**

2- Dado los vectores: **P = (2; –1; 1), M = (1; –1; 0)** y **Q = (–1; 2; 2)** , hallar:
a) $\mathbf{P}_\wedge(\mathbf{M} - \mathbf{Q})$ b) $2\mathbf{P}_\wedge 3\mathbf{Q}$ c) $(\mathbf{M} + \mathbf{Q})_\wedge (\mathbf{M} - \mathbf{Q})$

3- Siendo **A = 3 i – j – 2 k** y **B = i – 3k** .Hallar el vector perpendicular a los vectores**(2A + B)** y **(B – A).**

4- Hallar el vector de módulo 36, perpendicular a los vectores: $\vec{P}$ =(7, 0, –4) ; $\vec{Q}$ =(1, 1, 0).

5- El vector **X** es perpendicular a los vectores: **A = (4; –2; –3)** y **B = (0; 1; 3)** y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Hallar **X** si: $|X|$ = 26

6- Determinar el vector unitario perpendicular a los vectores: **P=i+j**;**Q=2i–j+3k**

7- Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores:**A=3i+j+2k ;B=4i–j**

8- Calcular el área del paralelogramo cuyos lados están determinados por los vectores 2**U** y **–V;** siendo: **U = (**2**;** –1**;** 0**) y V = (**1**;** –3**;** 2**)**

9- Calcular el área del triángulo de vértices:
a) M(1; 0; 1); P(4; 2; 1); Q(1; 2; 0) y b) M(–1; 2;–2); P(2; 3;–1); Q(0;1;1)

10- Calcular el área del paralelogramo que tiene un vértice en A(3; 2; 1) y una de sus diagonales, tiene como extremos los puntos B(1; 1; –1) y C(0; 1; 2)

11- Se dan los vértices de un triángulo: A(1; –1; 2); B(5; –6; 2) y C(1; 3; –1). Calcular la longitud de su altura, bajada desde el vértice B al lado AC.

12- Sabiendo que se cumple las relaciones: **A**∧**B** = **C**∧**D** y **A**∧**C** = **B**∧**D** , demostrar que los vectores **A** – **D** y **B** – **C** son colineales.

13- Determinar un vector **V** perpendicular al eje OY, que cumpla la relación: **U = V**∧**W** ;

14- Dados los vectores **U = (**0; 1; –1**);V = (**2; –2; –2**)** y **W = (**1; –1; 2**)**, determinar un vector **X** paralelo al vector **W** y que cumpla: **X**∧**U =V**

15- La fuerza **P =** 2 **i –** 4 **j +** 5 **k** está aplicada al punto M(4; –2; 3). Determinar el momento estático de esta fuerza con respecto al punto A(3; 2; –1)

16- Sabiendo que la fuerza **Q=**3**i+**4**j–**2**k** está aplicada a un cuerpo en el punto C(2; –1; –2), determinar la magnitud y los cosenos directores del momento de esta fuerza con respecto al origen de coordenadas.

17- La fuerza **P=**2**i+**2**j+**9**k**, está aplicada al punto A(4; 2; –3). Determinar la magnitud y los ángulos directores del momento de esta fuerza con relación al punto C(2; 4; 0)

18- El vector **X** es perpendicular a los vectores: **A = (**4**;** –2**;** –3**)** y **B = (**0**;** 1**;** 3**)** y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Hallar **X** si: $|X| = 26$

19- Si la fuerza **F** = 3**i** + 2**j** −4**k** se aplica al punto A(1; −1; 2), determinar el momento producido con relación al punto M(2; −1; 3).

20- La fuerza **P = i + 7 j + 12 k** está aplicada al punto M(1; 2; −3). Determinar el momento estático de esta fuerza con respecto al punto A(2; −2; 1).

21- El vector **X** es perpendicular a los vectores: **A = (**−4**;** −2**;** 1**)** y **B = (**0**;** −1**;** 3**)** y forma con el eje OY un ángulo obtuso. Hallar **X** si: $|\mathbf{X}| = 209$

22- Determinar el área del paralelogramo sabiendo que sus diagonales están representadas por los vectores: **A** = 3**i** + **j** −2**k** y **B** = **i** – 3**j** + 4**k**

23- Determinar un vector unitario perpendicular a los vectores: **A**=2**i**−6**j**−3**k**;**B**=4**i**+3**j**–**k**

EJERCITARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

PRODUCTO MIXTO DE VECTORES

1- Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos:
A(2, 3, 1), B (4, 3, –2), C(6,3,7) y D (–5,–4,8).

2- Conociendo tres vértices de un tetraedro: A(2; 1; −1), B(3; 0; 1) y C(2; −1; 3), y el volumen del mismo V = 5, hallar las coordenadas del cuarto vértice D, si se sabe que está en el eje OY

3- Siendo los vectores: **A = (**1**;** –1**;** 2**), B = (**3**;** 4**;** –2**)** y **C = (**–5**;** 1**;** –4**),** demostrar: **A.(BxC)=(AxB).C**