UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

CURSO PREPARATORIO DE INGENIERÍA (CPI)

EJERCITARIO GENERAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL

AÑO 2014

CAPÍTULO 1: FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

1. Clasifique las siguientes funciones en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, sabiendo que el dominio y el codominio son el conjunto de números reales:

1.1. $y = x^2$ Rta. No inyectiva, no sobreyectiva, no biyectiva.
1.2. $y = x^3$ Rta. Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.
1.3 $y = 2x$ Rta. Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.
1.4. $y = \sqrt{x}$ Rta. No es una función uniforme o univaluada.
1.5. $y = logx$ Rta. Es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.

2. Clasifique las siguientes funciones en inyectivas, sobreyectivas y biyectivas, sabiendo que el dominio es el conjunto de números naturales y el codominio es el conjunto de números reales:

2.1. $y = x^2$ Rta. No inyectiva, sobreyectiva, no biyectiva.
2.2. $y = x^3$ Rta. Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.
2.3. $y = 2x$ Rta. Inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.
2.4. $y = \sqrt{x}$ Rta. No inyectiva, sobreyectiva, no biyectiva.
2.5. $y = logx$ Rta. No inyectiva, sobreyectiva, no biyectiva.

3. Clasifique las siguientes funciones elementales:

3.1. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Rta. Elemental compuesta.
3.2. $y = \ln\frac{x+1}{x-1}$ Rta. Elemental compuesta.
3.3. $y = x^2 - 3$. Rta. Elemental algebraica racional entera cuadrática.
3.4 $y = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$. Rta. Elemental, algebraica, irracional.
3.5 $y = \cosh x$. Rta. Elemental, trascendente, exponencial.
3.6. $y = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$. Rta. Elemental, compuesta.
3.7. $y = e^{x+5}$. Rta. Elemental, compuesta.
3.8. $y = \frac{2x}{x^2 - 3}$. Rta. Elemental, algebraica, racional, fraccionaria.
3.9. y= arctg (ln x). Rta. Elemental, compuesta.
3.10 $y=2^x$. Rta. Elemental, trascendente, exponencial.
3.11 y= log x. Rta. Elemental, trascendente, logarítmica.
3.12. y=4. Rta. Elemental, algebraica, racional, entera, constante.
3.13. $y = x^{\frac{2}{3}}$. Rta. Elemental, algebraica, irracional.

4. Determine el dominio de definición y grafique las siguientes funciones:

4.1. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Rta. El conjunto de números reales.
4.2. $y = \ln\frac{x+1}{x-1}$ Rta. $-1 \succ x \succ 1$

4.3. $y = x^2 - 3$. Rta. El conjunto de números reales.

4.4. $y = |x-4|$ Rta. El conjunto de números reales.

4.5. $y = \sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}$ Rta. $-2 \prec x \succ 2$

4.6. $y = \cosh x$ Rta. El conjunto de números reales.

4.7. $y = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ Rta. $-1/3 \prec x \prec 1$

4.8. $y = e^{x+5}$ Rta. El conjunto de números reales.

4.9. $y = \frac{2x}{x^2-3}$ Rta. $x \neq \pm\sqrt{3}$

4.10. $y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2^x(x^2-1)}$ Rta. $-1 \succ x \succ 1$

4.11. $y = \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ Rta. $-2 \prec x \prec 2$

4.12. $y = |x| \cdot |5-x|$ Rta. El conjunto de números reales.

4.13. $y = \frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{\left(1+3^{\frac{1}{x}}\right)(2x^2-3x+1)}$ Rta. $x \neq 0; x \neq 0.5$

4.14. $y = |\cos x|$ Rta. El conjunto de números reales.

5. Cuáles de las funciones siguientes son monótonas. Clasificar las monótonas en crecientes o decrecientes en su dominio de existencia.

5.1. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Rta. No monótona.

5.2. $y = \ln\frac{x+1}{x-1}$ Rta. No monótona.

5.3. $y = x^2 - 3$ Rta. No monótona.

5.4. $y = |x-4|$ Rta. No monótona.

5.5. $y = \sqrt{1-\sqrt{4-x^2}}$ Rta. No monótona.

5.6. $y = \cosh x$ Rta. No monótona.

5.7. $y = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ Rta. Monótona decreciente

5.8. $y = e^{x+5}$ Rta. Monótona creciente.

5.9. $y = \frac{2x}{x^2-3}$ Rta. No monótona

5.10. y= signo (x-2) Rta. No monotona.

5.11. $y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{2^x(x^2-1)}$ Rta. No monótona

5.12. $y=\log\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$. Rta. Monótona creciente

5.13. $y=|x|\cdot|5-x|$ Rta. No monótona.

5.14. $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{\left(1+3^{\frac{1}{x}}\right)(2x^2-3x+1)}$ Rta. No monótona

5.15. $y=|\cos x|$ Rta. No monótona.

6. Clasificar las siguientes funciones en pares o impares:

6.1. $f(x)=x^2+5$ Rta. Par.

6.2. $f(x)=x^3+5x-7$ Rta. Ni par ni impar.

6.3. $f(x)=|5x|$ Rta. Par.

6.4. $f(x)=\sqrt{x\ \ -12}$ Rta. Ni par ni impar.

6.5. f(x) = sen x Rta. Impar.

6.6. f(x) = cos x Rta. Par.

6.7. f(x) = x^2. Rta. Par.

6.8. f(x) = x^3 Rta. Impar

6.9. f(x) = $|x|$ Rta. Par.

6.10. f(x) = tg x Rta. Impar.

7. Sabiendo que el dominio y el codominio son el conjunto de números reales, halle la función inversa de las siguientes funciones, si existen.

7.1. $f(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$ Rta. Biyectiva. $y=\dfrac{3+5x}{x-1}$

7.2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ Rta. No inyectiva.

7.3. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ Rta. No inyectiva.

7.4. $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & si\ x<0 \\ x^2 & si\ x\geq 0 \end{cases}$ Rta. No inyectiva.

7.5. $y=-4x^3+5$ Rta. Biyectiva. $y=\sqrt[3]{\dfrac{5-x}{4}}$

7.6. $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ Rta. Biyectiva. $y=\dfrac{2+2x}{x-1}$

7.7. $y=\ln(5-x)$ Rta. Biyectiva. $y=5-e^x$

7.8. $y=e^{x+5}$ Rta. Biyectiva. $y=\ln x-5$

7.9. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ Rta. No inyectiva.

7.10. $y=\cosh x$ Rta. No biyectiva.

7.11. $y=\sqrt{sen\, x}$ Rta. No inyectiva.

7.12. $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ Rta. Biyectiva. $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

8. Halle *f+g, f-g, f.g y f/g* y determine el dominio de cada una de estas funciones obtenidas.

8.1. $f(x)=\sqrt{1+x}\quad y\quad g(x)=\sqrt{1-x}$.

8.2. $f(x)=5x+2\quad y\quad g(x)=1-x^2$

8.3. $f(x)=\begin{cases}2 & si\ x\le -2\\ 0 & si\ x>-2\end{cases}\quad y\quad g(x)=\begin{cases}-1 & si\ x\le -2\\ 1 & si\ x>-2\end{cases}$

8.4. $f(x)=\sqrt{5x-7}\qquad g(x)=x^2-1$.

8.5. $f(x)=\begin{cases}5 & si\quad x>0\\ x+3 & si\quad x\le 0\end{cases}\quad y\quad g(x)=\begin{cases}x^2+2 & si\quad x>2\\ x-3 & si\quad x\le 2\end{cases}$

9. Encuentre funciones f y g tales que la función dada sea h=f (g).

9.1. $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+6}$

9.2. $h(x)=\sqrt{3x-2\cos x}$.

9.3. $h(x)=\ln(5x-7)^2$.

10. Halle f o g, g o f, f o f y g o g, donde:

10.1. $f(x)=\begin{cases}1-x & si\quad x\le 0\\ x^2 & si\quad x<0\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-x & si\quad x<1\\ x+1 & si\quad x\ge 1\end{cases}$

10.2. $f(x)=2x+|x-3|\qquad g(x)=\begin{cases}3-x & si\quad x<3\\ x+6 & si\quad x\ge 4\end{cases}$.

10.3. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\qquad g(x)=5x-3$.

10.4. $f(x)=x^2+1\qquad g(x)=sen\, x$.

10.5. $f(x)=e^{x+7}\qquad g(x)=\ln x-2$.

11. Resolver:

11.1. Sea $g(x)=\dfrac{1+3x}{2}$ y *f* una función tal que $f(g(x))=1-x$. Encuentra una expresión para *f(h(x))*, siendo $h(x)=\dfrac{2+5x}{3}$.

11.2. Halla la expresión de *f(x), si* $f\left(\dfrac{2-x}{3+x}\right)=x^2-3$.

11.3. Sea $f(x)=\dfrac{3x-4}{2x-1}$. Halla una expresión simplificada de $f(f(2/x))$.

11.4. Dadas las funciones $f(x) = -x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, definir *f/g.* Calcular las imágenes de los números -1, 2 y 3/2 mediante *f/g.*

11.5. Sean las funciones *f(x) = x + 3* y *g(x) = x²*. Calcular *g º f* y la imagen mediante esta función de 1, 0 y -3.

12. Calcular:

12.1. La función inversa de la función $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$, en el intervalo $[1,\infty)$.

12.2. Si $f(x) = 4x^2 + 3$; $g(x) = x^3 - 8$, hallar la función $f[g(x)]$.

12.3. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$, el dominio de la función $\frac{g}{f}(x)$.

12.4. Siendo f: R→R y $f(x) = x^2 + 4$, si la función f(x) inyectiva.

12.5. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3 - x}$, el dominio de la función *f*[*g*(*x*)].

12.6. La función inversa de la función $f(x) = |\, x \,| + 1$, en el intervalo $[0,\infty)$.

CAPÍTULO 1: MISCELÁNEA

13. Clasifique las siguientes funciones elementales:

13.1. $y = sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Rta. Compuesta.

13.2. $y = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ Rta. Compuesta.

13.3. $y = x^3 - 3$ Rta. Algebraica, entera, cubica.

14. Clasifique las siguientes funciones no elementales:

14.1. $y = |x^2 - 20|$ Rta. De valor absoluto.

14.2. $y = signox.$ Rta. De signo.

14.3. $y = roundx.$ Rta. De redondeo.

15. Clasifique las siguientes funciones:

15.1. $y = \sqrt{x - \sqrt{4x^3 - x^2}}$ Rta. Elemental algebraica irracional.

15.2. $y = ceilingx$ Rta. No elemental de techo.

15.3. $y = arctg\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ Rta. Elemental compuesta.

16. Determine el dominio y grafique las siguientes funciones:

16.1. $y = sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Rta. El conjunto de números reales.

16.2. $y = \frac{2x}{x^3 - 3}$ Rta. El conjunto de números reales menos para $x = \sqrt[3]{3}$ (para todo $x \neq \sqrt[3]{3}$).

17. Determine el dominio y grafique las siguientes funciones:

17.1. $y = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ Rta. El conjunto de números reales menosel intervalo comprendido entre -1 y 1. ($-1 \succ x \succ +1$)

17.2 $y = \sqrt{x - \sqrt{4x^3 - x^2}}$ Rta. $0.25 \succ x \prec 0.5$

18. Clasifique las siguientes funciones elementales:

18.1. $y = \sqrt{x-2}$ Rta. Algebraica irracional.

18.2. $y = senhx$ Rta. Algebraica exponencial.

18.3. $y = \frac{2x-3}{x^2-4}$ Rta. Algebraica racional cuadrática.

19. Clasifique las siguientes funciones no elementales:

19.1. y= signo (x^2-5) Rta. De signo.

19.2. y= y' –3 x Rta. Ecuación diferencial.

19.3. y= $\lim_{x \to -2} (x^3 - 6)$ Rta. De límite.

20. Clasifique las siguientes funciones:

20.1. y= arccos (lg x) Rta. Elemental compuesta.

20.2. y= cotg x Rta. Elemental trascendental trigonométrica.

20.3. y= argcosh x Rta. Elemental compuesta.

20.4. y= ln x Rta. Elemental trascendental logarítmica.

21. Determine el dominio y grafique las siguientes funciones:

21.1. $y = |x^2 + 5|$ Rta. El conjunto de números reales.

21.2. $y = senhx$ Rta. El conjunto de números reales.

21.3. $y = arcsen\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ Rta. $-1/3 \prec x \prec 1$

21.4. $y = e^{3x-4}$ Rta. El conjunto de números reales.

22. Determine el dominio y grafique las siguientes funciones:

22.1. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2-1)}$ Rta. $-1 \prec x \prec 1; 1 \prec x \leq \infty$

22.2. $y = \ln\left(\frac{3+x}{5-x}\right)$ Rta. $-3 \prec x \prec 5$

22.3. $y = x \cdot |5 - x|$ Rta. El conjunto de números reales.

22.4. y= cosh x Rta. El conjunto de números reales.

23. Cuáles de las funciones siguientes son monótonas?. Clasificar las monótonas en crecientes o decrecientes.

23.1. $y = sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ Rta. No monótona.

23.2. $y = \frac{2x}{x^3 - 3}$ Rta. No monótona..

24. Según el dominio y los gráficos hallados en el Taller No. 1, cuáles de las funciones siguientes son monótonas? Clasificar las monótonas en crecientes o decrecientes.

24.1. $y = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ Rta. No monótona

24.2. $y = \sqrt{x - \sqrt{4x^3 - x^2}}$ Rta. Monótona decreciente.

25. Clasificar las siguientes funciones en pares o impares:

25.1. $f(x) = x^3 - 4$. Rta. Ni par ni impar.

25.2. $f(x) = x^2 - 3x + 8$ Rta. Ni par ni impar.

25.3. $f(x) = |-3x|$ Rta. Par.

26. Clasificar las siguientes funciones en pares o impares:

26.1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$ Rta. Par.

26.2. f(x) = -sen x Rta. Impar.

26.3. f(x) = -cos x Rta. Par.

27. Clasifique las siguientes funciones en biyectivas, sobreyectivas e inyectivas. Halle la función inversa de las biyectivas.

27.1. $f(x) = \frac{x-6}{x+2}$ Rta. Biyectiva. $y = \frac{2x+6}{1-x}$

27.2. $f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$ Rta. No inyectiva.

27.3. $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ Rta. No inyectiva.

27.4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < 0 \\ x^3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ Rta. No inyectiva.

27.5. $y = 4x^4 - 6$ Rta. No inyectiva.

27.6. $y = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$ Rta. Biyectiva. $y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 12x + 8}}{2}$

28. Según el dominio y los gráficos hallados en el Taller No. 1, cuáles de las funciones siguientes son monótonas?. Clasificar las monótonas en crecientes o decrecientes.

28.1. $y = \left|x^2 + 5\right|$ Rta. No monótona.

28.2. $y = senhx$ Rta. Monótona creciente.

28.3. $y = arcsen\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ Rta. Monótona creciente.

28.4. $y = e^{3x-4}$ Rta. Monótona creciente.

29. Según el dominio y los gráficos hallados en el Taller No. 1, cuáles de las funciones siguientes son monótonas?. Clasificar las monótonas en crecientes o decrecientes.

29.1. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\left(x^2 - 1\right)}$ Rta. No monótona.

29.2. $y = \ln\left(\frac{3+x}{5-x}\right)$ Rta. Monótona creciente.

29.3. $y = x \cdot \left|5 - x\right|$ Rta. No monótona.

29.4. y= cosh x Rta. No monótona.

30. Clasificar las siguientes funciones en pares o impares:

30.1. f(x) = $x^2 + 5$ Rta. Par.

30.2. f(x) = $x^3 - 2$ Rta. Ni par ni impar.

31. Clasificar las siguientes funciones en pares o impares:

31.1. f(x) = $\left|x^2\right|$ Rta. Par.

31.2. f(x) = cotg x. Rta. Impar.

32. Clasifique las siguientes funciones en biyectivas, sobreyectivas e inyectivas. Halle la función inversa de las biyectivas.

32.1. $y = \log(5 - x)$ Rta. Biyectiva. $y = 5 - 10^x$

32.2. $y = e^{2x-3}$ Rta. Biyectiva. $y = \frac{\ln x - 3}{2}$

32.3. $y = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ Rta. No inyectiva.

32.4. $y = senhx$ Rta. No biyectiva.

32.5. $y = \sqrt{\cos(x+1)}$ Rta. No inyectiva.

32.6. $y = \ln\frac{x-1}{x+1}$ Rta. Biyectiva. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

33. Halle f+g y f-g, y determine el dominio de cada una de las funciones obtenidas, siendo:

33.1. $f(x) = \sqrt{2-x}$ y $g(x) = \sqrt{2+x}$. Rta. f+g = $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ .Dominio: $-2 \le x \le 2$

33.2. $f(x)=4x^2-2$ y $g(x)=3-x$ Rta. f-g= $\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$ .Dominio: $-2\le x\le 2$

34. Halle f.g y f /g y determine el dominio de cada una de las funciones obtenidas, siendo:

34.1 $f(x)=\sqrt{2x^2-3}$ $g(x)=x^3-2$. Rta. f.g= $\sqrt{2x^2-3}.(x^3-2)$ Dominio: El conjunto de los números reales.

f/g= $\dfrac{\sqrt{2x^2-3}}{x^3-2}$ Dominio: Elconjunto de los números reales, menos para x= $\sqrt[3]{2}$.

35. Encuentre funciones f y g tales que la función dada sea h=f (g), siendo

35.1. *h(x) = cos (x^2)* Rta. f(x)= cos x, g(x)= x^2

35.2 $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\ +4)}$ Rta. f(x) = 1/x, g(x)= $\sqrt{x}\ +4$

35.3. $h(x)=\sqrt{4x-2senx}$ Rta. f(x)= $\sqrt{2x}$, g(x)= 2x-senx

36. Halle f_0g y g_0f, donde:

36.1. $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ $g(x)=2x+3$. Rta. f_og= $\dfrac{2x+3}{2x+5}$; g_of= $\dfrac{2x}{x+2}+3$

36.2. $f(x)=x^2-1$ $g(x)=\cos x$. Rta. f_og= $\cos^2$ x -1 ; g_of= cos (x^2-1)

37. Halle f_0g y g_0f, donde:

37.1 $f(x)=3x-|x-2|$ $g(x)=\begin{cases}3-x & si \quad x\lhd 4\\ x+2 & si \quad x\ge 4\end{cases}$.

Rta. f_of= $9x-3.|x-2|-|3x-2-|x-2||$

g_og= $g(x)=\begin{cases}x & si \quad x\lhd 4\\ x+4 & si \quad x\ge 4\end{cases}$

37.2. $f(x)=e^{x-3}$ $g(x)=\log x+1$. Rta. f_of= $e^{e^{x-3}-3}$; g_og=log (log x +1) +1.

38. Halle f+g y f-g, y determine el dominio de cada una de las funciones obtenidas, siendo:

38.1. $f(x)=\begin{cases}2 & si\ x\le 2\\ 0 & si\ x>2\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}-3 & si\ x\le 2\\ 3 & si\ x>2\end{cases}$

Rta.: $f+g=\begin{cases}-1 & si\ x\le 2\\ 3 & si\ x>2\end{cases}$; Dominio: El conjunto de números reales.

$f-g=\begin{cases}5 & si\ x\le 2\\ -3 & si\ x>2\end{cases}$; Dominio: El conjunto de números reales.

39. Halle *f.g* y *f/g* y determine el dominio de cada una de las funciones obtenidas, siendo:

39.1. $f(x)=\begin{cases}2 & si\ x\le 2\\ 0 & si\ x>2\end{cases}$; $g(x)=\begin{cases}-3 & si\ x\le 2\\ 3 & si\ x>2\end{cases}$

Rta.: $f.g=\begin{cases}-6 & six\le 2\\ 0 & six>2\end{cases}$; Dominio: El conjunto de números reales.

$f/g = \begin{cases} -2/3 & si x \leq 2 \\ 0 & si x > 2 \end{cases}$; Dominio: El conjunto de números reales.

40. Encuentre las funciones f y g tales que la función dada sea h=f (g), siendo:

40.1. $h(x) = log(3x+2)^3$ Rta. f(x) = log x
g(x)= $(3x+2)^3$

41. Halle f_0g y g_0f, donde:

41.1 $f(x) = 3x - |x-2|$; $g(x) = \begin{cases} 3 - x & si\ x \lhd 4 \\ x + 2 & si\ x \geq 4 \end{cases}$

Rta.: $f_0g = \begin{cases} 9 - 3x - |1-x| & si\ x \lhd 4 \\ 3x + 6 - |x| & si\ x \geq 4 \end{cases}$

$g_0f = \begin{cases} 9x - 3.|x-2| & si\ x \lhd 4 \\ 3x + 2 - |x-2| & si\ x \geq 4 \end{cases}$

42. Resolver:

42.1. Sea $g(x) = \dfrac{1+3x}{2}$ y f una función tal que $f(g(x)) = 1 - x$. Encuentra una expresión para *f(h(x)),* siendo $h(x) = \dfrac{2+5x}{3}$.

Rta.: f(x)=$\dfrac{4-2x}{3}$ y f(h(x))=$\dfrac{8-10x}{9}$

42.2. Calcular la función inversa de la función f(x) = $2x^2 - 4x - 6$, en el intervalo $[1,\infty)$.

Rta.: $y = 1 \pm \dfrac{\sqrt{16+2x}}{2}$.

42.3. Sea $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x-1}$. Halla una expresión simplificada de $f(f(2/x))$.

Rta.: $f(f(2/x)) = \dfrac{2-8x}{8-7x}$

43. Dadas las funciones $f(x) = -x - 1$ y $g(x) = 2x + 3$, definir *f/g.* Calcular las imágenes de los números -2, 0 y 5/2 mediante *f/g.*

Rta.: f/g= $\dfrac{-x-1}{2x+3}$
f/g (-2)=-1; f/g (0)=-1/3; f/g (5/2)=-28.

44. Sean las funciones *f(x) = x - 3* y *g(x) =* x^3. Calcular *g o f* y la imagen mediante esta función de 2, 0 y -4.

Rta.: $g^o f = (x-3)^3$
$g^o f(2)=-1$; $g^o f(0)=-27$; $g^o f(-4)=-343$.

45. Calcular la función inversa de la función f(x) = | x | - 1, en el intervalo $[0,\infty)$.

Rta.:y= x+1 para $x \geq -1$

y= -x-1 para $x \leq -1$

46. Si f(x) = $x^2 + 2$; g(x) = x2 – 4, hallar la función f[g(x)].

Rta.:$f(g(x))=x^4-8x^2+18$.

47. Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\sqrt{1-x}$, calcular el dominio de la función f/g.

Rta.: f/g= $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$, y su dominio es $0 \leq x \prec 1$.

48. Siendo f: R$\rightarrow$R y f(x) = x^{2} - 4, calcular si la función f(x) es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva .

Rta.:La función no es inyectiva, no es sobreyectiva y por tanto tampoco biyectiva.

49. Si $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ y $g(x)=\sqrt{3-x}$, calcular el dominio de la función g[f(x)].

Rta.:g[f(x)]= $3-\sqrt{4-x^2}$. Su dominio es $-2 \leq x \leq 2$

CAPÍTULO 2: LÍMITE DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

1 Calcular los siguientes límites:

1.1. $\lim_{x\to 4} 7$	Rta.: 7
1.2. $\lim_{x\to 3} x+2$	Rta.: 5
1.3. $\lim_{x\to 2}(x^3-x)$	Rta.: 6
1.4. $\lim_{x\to 3}(x-1)(4-x)$	Rta.: 2
1.5. $\lim_{x\to 5}\frac{x+4}{x-1}$	Rta.: 9/4
1.6. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}$	Rta.: 1/7
1.7. $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$	Rta.: 9/2
1.8. $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2-3x-1}{x^2-1}$	Rta.: 5/2
1.9. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$	Rta.: -1/3
1.10. $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$	Rta.: 1/6
1.11. $\lim_{x\to a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$	Rta.: 3 a.
1.12. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{8x+7}$	Rta.: 3/8
1.13. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{4x^3-1}$	Rta.: 0
1.14. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$	Rta.: 0
1.15. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-1}{4x^2-10}$	Rta.: ∞
1.16. $\lim_{x\to\infty}\frac{7+6^x}{3+6^x}$	Rta.: 1
1.17. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$	Rta.: 4
1.18. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$	Rta.: ½.
1.19. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$	Rta.: ½.
1.20. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$	Rta.: 1

1.21. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ Rta.: 1

1.22. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ Rta.: 0

1.23. $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{tgx}$ Rta.: 1

1.24. $\lim_{x\to 0}\frac{sen4x}{x}$ Rta.: 4

1.25. $\lim_{x\to 0} x.cotgx$ Rta.: 1

1.26. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2cosx}{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$ Rta.: $\sqrt{3}$

1.27. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{x^3}$ Rta.: ½

1.28. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ Rta.: e^2

1.29. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ Rta.: 1/e

1.30. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ Rta.: 1/e

1.31. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$ Rta.: e

1.32. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{2x+1}$ Rta.: 1

1.33. $\lim_{x\to 0}\frac{sen3x}{sen4x}$ Rta.:¾

1.34. $\lim_{x\to 0}\frac{sen^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}$ Rta.: 1/9

1.35. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x+1}}}$ Rta.: No tiene límite.

1.36. $\lim_{x\to -\infty} e^x$ Rta.: 0

1.37. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+1}{x}$ Rta.: 1

1.38. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2}$ Rta.: ∞

1.39. $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{x^2}$ Rta.: $-\infty$

CAPÍTULO 2: MISCELÁNEA

2 Demostrar los siguientes límites según la definición:

2.1. $\lim_{x\to 0} x^3+1=1$ Rta.:Para $\left|(x-0)^3\right| \prec \varepsilon$ existe un $\left|(x-0)\right| \prec \sqrt[3]{\varepsilon}=\delta$

2.2. $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2+2}=-3$ Rta.:Para $\left|\frac{1}{x^2+2}\right| \prec \varepsilon$, existe un $|x| \succ \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-2}, x \prec -M$

3 Hallar un δ en cada caso, según la definición de límites:

3.1. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x+3}=1$con ε = 0.05 Rta.:δ=(ε+2)^2 -4=0.02025

3.2. $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1}=\infty$con M=100 Rta.:δ=2/M=0.02.

4 Obtener el valor de los siguientes límites

4.1. $\lim_{x\to 1} f(x)$, si se cumple que:$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-5}{x-3}=1$ Rta.: 3

4.2. $\lim_{x\to 1} f(x)$, si se cumple que: $\lim_{x\to 1} \frac{x.f(x)}{(x-3)^2}=1$ Rta.: 0.

5 Halla el límite de la siguiente sucesión:

5.1. $\lim_{x\to\infty} 2^n sen\left(\frac{n}{2^n}\right)$ Rta.: Infinito

6 Halla el límite de las siguientes funciones:

6.1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ Rta.: 1

6.2. Sea $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si \quad x<4 \\ 5x+K & si \quad x\geq 4 \end{cases}$, determine el valor de *k*, para que$\lim_{x\to 4} f(x)$exista.

Rta.: k=-6.

6.3. Sea$f(x)=\begin{cases} x^2 si & x\leq -2 \\ ax+b \ si & -2<x<2, \\ 2x-5 \ si & x>2 \end{cases}$

Encuentre los valores de *a* y *b* para que $\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ existan.

Rta.:*a*=-5/4 y *b*=3/2.

7 Demostrar que los siguientes limites no existen (son indeterminados):

7.1. $\lim_{x\to 0} signo\ x$ Rta.:*Al graficar la función,y=-1 para x<0; y=0 para x=0; y=1 para x>0, la función está definida para x=0 pero sus límites a derecha y a izquierda no coinciden, por lo tanto el límite no existe para x=0.*

7.2. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ Rta.:*Al graficar la función, ésta no está definida en x=1, además sus límites a derecha y a izquierda no coinciden, por lo tanto el límite no existe en x=1.*

8 Calcular los siguientes límites:

8.1. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{5x+1}$ Rta.: 1

8.2. $\lim_{x\to 0}\frac{sen\ \alpha x}{sen\ \beta x}$ Rta.:$\frac{\alpha}{\beta}$

8.3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2cosx}{sen\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$ Rta.: 1/6

8.4. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ Rta.: e^3

8.5. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ Rta.: e

8.6. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{5}}{x-5}$ Rta.:$\frac{1}{5\sqrt[5]{625}}$

9 Comprobar si existe el límite en el punto señalado:

9.1. $\lim_{x\to 0}\frac{|ax-1|-|ax+1|}{x}$, sabiendo que *0<a<1.* Rta. Existe y vale: -2*a.*

10 Determinar las discontinuidades de las funciones:

10.1. $y=\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{x\ sen\sqrt[3]{1-x}}$ Rta.: Discontinua en *x=0* y en *x=1*.

10.2. $y=tg\ x$ Rta.: discontinua infinita en $x=\pm\frac{k\pi}{2}$

10.3. $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ Rta.: discontinua infinita en x=1

10.4. $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ Rta.: discontinua infinita en x=1

10.5. $y=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ Rta.: discontinua infinita en x=0

10.6. $y=sen\frac{1}{x}$ Rta.: discontinua de segunda especie en x=0

11 Verifique si las siguientes funciones son continuas en x=2:

11.1. $y=\frac{3x^2}{x-2}$

11.2. $y=|x|$

11.3. $y = \begin{cases} \frac{x^{3-8}}{x-2} & para\ x \neq 2 \\ 12 & para\ x = 2 \end{cases}$ Rta.: la función es continua en x=2

11.4. $y = \begin{cases} \ln x - 1 & para\ \ x \geq 2 \\ \frac{x^2-4x+4}{x-2} 12 & para\ \ x = 2 \end{cases}$ Rta.: la función es continua en x=2

12 Verifique si las siguientes funciones son continuas en x=0:

12.1. $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & para\ \ \ x \neq 0 \\ 1 & para\ \ \ x = 0 \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} sen\frac{1}{x} & para\ \ x < 0 \\ 0 & para\ \ x \geq 0 \end{cases}$ Rta.: la función tiene una discontinuidad de segunda especie en x=0

13 Hallar a y b para que la función sea continua en x=1 y discontinua en x=2, si:

$$\begin{cases} ax - b & para\ \ x \leq 1 \\ 3x & para\ \ 1 < x < 2 \\ bx^2 - a & para\ \ x \geq 2 \end{cases}$$

14 Dibuje la gráfica de una función f(x) que satisfaga todas las siguientes condiciones:

a) su dominio sea $[0{,}6]$

b)f(0)=f(2)=f(6)=2.

c) f(x) sea continua, excepto para x=2.

d)$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 5} f(x) = 3$

15 Verificar si las siguientes funciones son infinitésimos cuando *x=0* y compararlas.

$y = sen\, x$

$y = 1 - \cos x.$

$y = x^2$

16 Si $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 3} g(x) = -2$siendo *g(x)* continua en *x=3*, hallar el valor de:

16.1. $\lim_{x\to 2} g[f(x)]$ Rta.: -2

16.2. $\lim_{x\to 3} \frac{g(x)-g(3)}{f(x)}$ Rta.: 0

17 Hallar los valores de *a* para los que la función $\boldsymbol{y = \frac{1}{ax^2-2ax+1}}$ sea:

17.1. Continua en todo el rango de los números reales.

17.2. Continua en el intervalo $[0{,}1]$

18 Analiza la continuidad de las siguientes funciones:

18.1. $f(x) = \ln(9 - x^2)$

18.2. $f(x) = \frac{(x^2+3)^5}{x^2+2x+5}$ Rta: la función existe para *x* entre (-3;3)

19 Hallar *b* y *c* para que la función f(x) sea continua en toda la recta real, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & para \ |x-2| < 1 \\ x^2 + bx + c & para \ |x-2| \geq 1 \end{cases}$$

20 Hallar los siguientes límites:

20.1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+1}-x}$ Rta.: 1

20.2. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[2x]{\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x^2+1}}$

20.3. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^x$ Rta.:*e*

20.4. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+10}{x}\right)^x$ Rta.:e^{10}

20.5. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ Rta.: Infinito.

21 Cuando *x* tiende a cero, verificar si las siguientes funciones son infinitésimos, determinar los que son del mismo orden que *x* y los de orden superior e inferior a *x*.

a) $y = x^2 y$

b) $y = \sqrt{x(1-x)}$

c) $y = sen\ 3x$

d) $y = 2x.cosx\sqrt[3]{tg^2 x}$

e) $y = xe^{2x}$

Rta.: Son del mismo orden:$sen\ 3x$;xe^{2x}
Son de orden superior: $x^2 y$;$2x.cos\ x\sqrt[3]{tg^2 x}$
Es de orden inferior: $\sqrt{x(1-x)}$

22 Entre los siguientes infinitésimos, cuando *x*tiende a cero, hallar los que son del mismo orden que x.

22.1. $y = 2sen\, x$

22.2. $y = 0{,}5\, tg\, x$

22.3. $y = x - 3x^2$

22.4. $y = \sqrt{2x^2 + x^3}$

22.5. $y = \ln(1 + x)$

22.6. $y = x^3 + 3x^4$

23 Verificar que los infinitésimos$(\mathbf{1} - \boldsymbol{x})$; $\left(\mathbf{1} - \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}\right)$son del mismo orden cuando $\boldsymbol{x} \to \mathbf{1}$. ¿Son equivalentes?

Rta.: Son del mismo orden, pero no son equivalentes.

CAPÍTULO 3: DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

1. Aplicando la definición, hallar la derivada de las siguientes funciones:

1.1. $y = x^2 + 5$ Rta. $y' = 2x$

1.2. $y = \sqrt{x}$ Rta. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.3. y=cos x Rta. y'= -sen x.

1.4. $y = \ln x$ Rta. $y' = \frac{1}{x}$

2. De acuerdo a la interpretación geométrica de la derivada, hallar el valor de la pendiente de la recta tangente a las siguientes funciones, en los puntos establecidos:

2.1. $y = \frac{1}{x}$ en x=4. Rta.:$-\frac{1}{16}$

2.2. $y = x^2$ en x=6. Rta.: 12

2.3. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ en x=64. Rta.: $\frac{1}{12}$

2.4. $y = \ln\sqrt{tg\ x}$ en x=$\frac{\pi}{4}$ Rta.: 1

3. Hallar la derivada de las siguientes funciones algebraicas:

3.1. $y = x^3 + 3x + \frac{1}{x^2} + 5$ Rta.:$3x^2 - \frac{2}{x^3+3} + 3$

3.2. $y = \sqrt{2x^3 - 6x + 7}$ Rta.:$\frac{3(x^2-1)}{\sqrt{2x^3-6x+7}}$

3.3. $y = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 1)^3$ Rta.:$(2x^2 + 1)^2(16x^3 - 42x^2 + 26x - 3)$

3.4. $y = \left(\frac{x-7}{x+2}\right)^3$ Rta.:$\frac{27(x-7)^2}{(x+2)^4}$

4. Hallar la derivada de las siguientes funciones trigonométricas:

4.1. $y = 4sen(x^2 + 1)$ Rta.: $8.x.cos(x^2 + 1)$

4.2. $y = tg^5 x$ Rta.:$5tg^4x.sec^2x$

4.3. $y = x^2 sec(6x)$ Rta.: $2x.sec(6x)[1 + 3x.tg(6x)]$

4.4. $y = \frac{2+sen(4x)}{cos(4x)}$ Rta.:$\frac{4+8.sen(4x)}{cos^2(4x)}$

5. Hallar la derivada de las siguientes funciones logarítmicas:

5.1. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$ Rta.:$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$

5.2. $y = \ln cosx^2$ Rta.:$-2x.tgx^2$

5.3. $y = \log_3(6x^3+1)$ Rta.: $\frac{18x^2}{(6x^3+1)\ln 3}$

5.4. $y = x^3 \ln 4x^4$ Rta.:$x^2(3\ln 4x^4 + 4)$

6. Hallar la derivada de las siguientes funciones exponenciales:

6.1. $y = e^{\sqrt{x}}\sqrt{4x^4+1}$ Rta.: $\frac{\left(x^4+1+4x^{\frac{7}{2}}\right)e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{x^4+1}}$

6.2. $y = e^{x^2+3x-1}$ Rta.:$(2x+3)e^{x^2+3x-1}$

6.3. $y = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$ Rta.: $\frac{4e^{2x}}{(1-e^{2x})^2}$

6.4. $y = 2^x e^{-x}$ Rta.:$2^x e^{-x}(\ln 2 - 1)$

7. Hallar la derivada de las siguientes funciones trigonométricas inversas:

7.1. $y = arctg(4x)$ Rta.: $\frac{4}{16x^2+1}$

7.2. $y = arccos(\pi - 2x)$ Rta.: $-\frac{2}{\sqrt{1-(\pi-2)^2}}$

7.3. $y = x^4 arcsen\sqrt{x-1}$ Rta.:$4x^3 arcsen\left(\sqrt{x-1}\right) + x^4\frac{1}{2\sqrt{x-1}\sqrt{2-x}}$

7.4. $y = arcsen\, x + arcsen\sqrt{1-x^2}$ Rta.: 0.

8. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

8.1. $y^3 - 4y^2 - 6x^3 + 2y - 2x = 0$ Rta.:$\frac{18x^2+2}{3y^2-8y+2}$

8.2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$ Rta.: $\sqrt[-3]{\frac{y}{x}}$

8.3. $x\ln y + y\ln x = 1$ Rta.: $\frac{-\left(\ln y + \frac{y}{x}\right)}{\frac{x}{y}+\ln x}$

8.4. $xy = \cos(x+y)$ Rta.:$\frac{-sen(x+y)-y}{x+sen(x+y)}$

9. Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas aplicando la derivación logarítmica:

9.1. $y = (sen\, x)^x$ Rta.: $(\ln sen\, x + x.cotg\, x)(sen\, x)^x$

9.2. $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2x}$ Rta.: $2\left(\frac{x}{2}\right)^{2x}\left(\ln\frac{x}{2}+1\right)$

9.3. $y = x^{x^x}$ Rta.: $x^{x^x}(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1})$

9.4. $y = (\ln x)^{\sqrt{x}}$ Rta.: $(\ln x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)$

10. Hallar la derivada de las siguientes funciones hiperbólicas:

10.1. $y = cosh(\sqrt{x})$ Rta.: $\frac{senh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

10.2. $y = \frac{1-\cosh x}{1+\cosh x}$ Rta.: $-\frac{2\, senh\, x}{(1+\cosh x)^2}$

11. Hallar la derivada de las siguientes funciones hiperbólicas inversas:

11.1. $y = \tanh^{-1}(sen\ x)$ Rta.: $\sec x$

11.2. $y = x.senh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \sqrt{9+x^2}$ Rta.: $senh^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

12. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones paramétricas:

12.1. $\begin{matrix} x=a.cos^3 t \\ y=a.sen^3 t\end{matrix}$ Rta.: $-tg\ t$

12.2. $\begin{matrix} x=e^{2t}.cos^2 t \\ y=e^{2t}.sen^2 t\end{matrix}$ Rta.: $\frac{1+tg\ t}{\cot t - 1}$

13. Hallar la derivada de las siguientes funciones en coordenadas polares:

13.1. $\rho = 2Rcos\varphi$ para R constante Rta. : $2Rsen\varphi$

13.2. $\rho = \frac{p}{cos(\varphi-\alpha)}$ Rta.: $-\frac{\rho^2}{p}$

CAPÍTULO 3: MISCELÁNEA I

14. Aplicando la definición, hallar la derivada de las siguientes funciones:

14.1. $y = e^x$ Rta.: $y' = e^x$

14.2. $y = \log_b x$ Rta.: $y' = \frac{1}{x\ln b}$

15. De acuerdo a la interpretación geométrica de la derivada, hallar el valor de la pendiente de la recta tangente a las siguientes funciones y el ángulo que forma dicha tangente con el eje x en los puntos dados:

15.1. $y = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^3$ $en\ x = 3$ Rta.: -144 ; $-89{,}602°$

15.2. $y = \frac{(x^2+1)^2}{(x-5)^3}$ $en\ x = 2$ Rta.:$-\frac{165}{81}$; $-63{,}853°$

16. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

16.1. $y = \ln\sqrt{\cos 2x}$ Rta.: $-tg\ 2x$

16.2. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ Rta.: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

16.3. $y = arc\ cot\frac{x+1}{1-x}$ Rta.: $-\frac{1}{x^2+1}$

16.4. $y = \frac{arc\ tg\ x}{x}$ Rta.: $\frac{x-(1+x^2)\ arc\ tg\ x}{x^2(1+x^2)}$

17. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$de las siguientes funciones implícitas:

17.1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Rta.:$-\frac{b^2x}{a^2y}$

17.2. $e^x.sen\ y - e^{-y}.\cos x = 0$ Rta.: $-\frac{e^x.sen\ y+e^{-y}sen\ x}{e^x.\cos y+e^{-y}.\cos x}$

18. Hallar la derivada de las siguientes funciones dadas en forma explícita:

18.1. $y = arc\ tg\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ Rta.: $y' = \frac{1}{2}$

18.2. $y = \ln\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2} + 2arc\ tg\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$. Rta.: $\frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$

19. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones dadas en forma implícita:

19.1. $y^x = x^y$ Rta.: $\frac{x^2}{y^2}$

19.2. $cos(xy) = x$ Rta.:$\frac{1+y.sen(xy)}{x.sen(xy)}$

20. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones dadas en forma paramétrica:

20.1. $\begin{matrix} x=e^{2t}cos^2t \\ y=e^{2t}sen^2t \end{matrix}$ Rta.: $\frac{tg\ t+1}{cosec\ t-1}$

20.2. $\begin{matrix} x=\ln(cotg\ t) \\ y=tg\ t+cotg\ t \end{matrix}$ Rta.: $tg\ 2t$

21. Hallar la derivada $\frac{d\rho}{d\varphi}$ de la siguiente función dada en forma polar:

21.1. $\rho = tg(\varphi + \rho)$ Rta.: $-cosec^2(\varphi + \rho)$

22. Demostrar que la tangente a la espiral logarítmica dada por la ecuación polar $\rho = e^{2\varphi}$ forma con el radio vector un ángulo constante de 26,565º.

23. Dadas las funciones $y = f(x)$, hallar $\frac{dx}{dy}$. Hallar además su función inversa $x = \varphi(y)$ y demostrar que se cumple que $f'(x) = \frac{1}{\rho'(y)}$.

23.1. $y = x \ln x$ Rta.: $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{x+1}$

23.2. $y = senh\, x$ Rta.: $\frac{dx}{dy} = \operatorname{sech} x$

24. Hallar la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de las siguientes funciones:

24.1. $x^2 + y^2 = 1$ Rta.: $y'' = -\frac{1}{y^3}$

24.2. $y = \sqrt{4 - x^2}$ Rta.: $y'' = \frac{4}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$

25. Hallar la tercera derivada $\frac{d^3y}{dx^3}$ de las siguientes funciones:

25.1. $y = x.arctg\, x$ Rta.: $y''' = -\frac{8x}{(1+x^2)}$

25.2. $y = \frac{1-x}{1+x}$ Rta.: $y''' = -\frac{12}{(1+x^4)}$

26. Verificar que:

26.1. Si $y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x}$, se cumple que: $y'' + 3y' - 4y = 0$

26.2. Si $y = e^{-2x}(sen2x + cos2x)$, se cumple que: $y'' + 4y' + 8y = 0$

26.3. Si $y = -\frac{1}{3} e^x \cos x$, se verifica que $y'' - 2y' - y = e^x \cos x$

27. Hallar la segunda derivada $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}$ de la siguiente función dada en forma polar:

27.1. $\rho = tg(\varphi + \rho)$ Rta.: $-\frac{cotg^3(\varphi+\rho)}{sen(\varphi+\rho)}$

28. Demostrar que: dada la función implícita F(x,y)=0, se verifica que:

28.1. $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2F'_x.F'_y.F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{xx} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{(F'_y)^3}$

28.2. $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy}.y' + 3F'''_{xyy}.(y')^2 + F'''_{yyy}.(y')^3 + 3F''_{xy}.y'' + 3F''_{yy}..y'.y''}{F'_y}$

29. Demostrar que dada la función $y = f(x)$ en forma paramétrica, de manera tal que $x = x(t)$ e $y = y(t)$, se verifica que:

29.1. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'.y''-y'.x''}{(x')^3}$

29.2. $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'.y'''-y'.x''')-3x''(x'.y''-y'.x'')}{(x')^5}$

Siendo las derivadas todas con respecto al parámetro t.

30. Demostrar que dada una función en forma polar $\rho = f(\varphi)$, la derivada del radio vector con respecto al ángulo polar es igual al producto de la longitud del radio vector por la cotangente del ángulo formado por el radio vector y la tangente a la curva en un punto dado.

31. Calcular la tangente del ángulo formado por el radio vector y la recta tangente a la curva $\rho^2 = a^2 cos(2\varphi)$ en el punto donde $\varphi = \frac{\pi}{16}$. **Rta.** $y' = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

32. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones:

32.1. $y = (sen\ 2x)^{\sqrt{x}}$ Rta.: $y' = (sen\ 2x)^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln(sen\ 2x)}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}.cotg\ 2x\right]$

32.2. $\begin{matrix} x = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) \\ y = arcsen\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) \end{matrix}$ Rta.: 1.

32.3. Demostrar que, dada la función de la forma $y = u^v$, donde $u = u(x)$ y $v = v(x)$, se verifica que: $\frac{dy}{dx} = u^v \ln u \frac{dv}{dx} + v.u^{v-1}\frac{du}{dx}$

33. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones:

33.1. $y = cos\sqrt{\log e^{(x^2-3)}}$ Rta.: $\frac{x.sen\sqrt{\log e^{(x^2-3)}}}{\ln 10.\sqrt{\log e^{(x^2-3)}}}$

33.2. $y = \log_{sen\,x}\cos x$ Rta.: $-\frac{tgx.\ln senx + cotgx.\ln cosx}{\ln^2 senx}$

33.3. $y = arccotg\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ Rta.: $\frac{1}{x\left(1+\ln^2\frac{1}{x}\right)}$

34. Hallar la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la siguiente función:

34.1. $y = ln(sen^2 4x)$ Rta.: $-32cosec^2 4x$

35. Hallar la enésima derivada de la siguiente función:

35.1. $y = \frac{1-x}{1+x}$ Rta.: $y^{(n)} = \frac{(-1)^n.2.n!}{(1+x)^{n+1}}$

CAPÍTULO 3: APLICACIONES DE LA DERIVADA.

36. Hallar la diferencial de primer orden para las siguientes funciones:

36.1. $y = (10 - 2x)^2$ — Rta.: $dy = -6(10 - 2x)^2 . dx$

36.2. $y = a\sqrt{x^2 + 6x + 3}$ — Rta.: $dy = \frac{a(x+3)}{\sqrt{x^2+6x+3}} dx$

36.3. $y = tg\, x^2$ — Rta.: $dy = 2x\, sec^2 x^2 dx$

36.4. $y = 5^{\sqrt{x}}$ — Rta.: $dy = 5^{\sqrt{x}} \ln 5 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

36.5. $y = \frac{\ln x^2}{x^2}$ — Rta.: $dy = \frac{2(1-2\ln x)}{x^3} dx$

36.6. $y = \ln sen\, 3x$ — Rta.: $dy = 3\, cotg 3x\, dx$

36.7. $bx^2 - ay^2 = a^2 b^2$ — Rta.: $dy = \frac{bx}{ay} dx$

37. Hallar la diferencial de segundo orden de las siguientes funciones:

37.1. $y = (3x - 1)(2x + 5)$ — Rta.: $d^2 y = 12(dx)^2$

37.2. $9^y = \ln c. x$ — Rta.: $d^2 y = -\frac{1}{x^2}(dx)^2$

38. Usando el concepto de diferencial, hallar el valor aproximado de:

38.1. $\sqrt{104}$ — Rta.: 10.2

38.2. $tg 45º3'20''$ — Rta.: 1,00194.

38.3. $cos 61º$ — Rta.: 0,48489.

38.4. $tg 44º$ — Rta.: 0,96509.

39. Hallar el valor de dy y Δy sabiendo que:

39.1. $y = \sqrt[3]{x - 1}$; $x = 28$; $\Delta y = 0,1$ — Rta.: $dy = 0,003704$ $\quad \Delta y = 0,003699$

39.2. $y = \sqrt[4]{2x - 3}$; x=42 ; $\Delta y = 0,1$ — Rta. $dy = 0,001852$ $\quad \Delta y = 0,001850$

40. Calcular los siguientes límites aplicando la regla de L'Hospital:

40.1. $\lim_{x\to 0} \frac{x + sen\, 3x}{x - sen\, 3x}$ — Rta.: –2.

40.2. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$ — Rta.: 1.

40.3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - tg\, x}{\cos 2x}$ — Rta.: 1.

40.4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$ Rta.: 0

40.5. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-(1-x)}{x}$ Rta.: 2

40.6. $\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ Rta.: $\frac{5}{4}$

40.7. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x^2}$ Rta.: ∞

40.8. $\lim_{x\to1}\frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$ Rta.: $-\frac{1}{6}$

40.9. $\lim_{x\to0}\frac{tgx-x}{x^3}$ Rta.: $\frac{1}{3}$

40.10. $\lim_{x\to0}\frac{x.cosx-senx}{x^3}$ Rta.: $-\frac{1}{3}$

40.11. $\lim_{x\to0}\frac{\ln senx}{\ln tgx}$ Rta.: 1

40.12. $\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{4x}$ Rta.: $\frac{1}{4}\ln\frac{a}{b}$

40.13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln senx}{(\pi-2x)}$ Rta.: 0

40.14. $\lim_{x\to1}\frac{arctgx-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ Rta.: $\frac{1}{2}$

40.15. $\lim_{x\to0}\frac{2\,arctgx-x}{2x-arcsenx}$ Rta.: 1

41. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de las siguientes funciones:

41.1. $y=x^2$ en el punto P(2,4). Rta.: $\begin{matrix}4x-y-3=0\\x+4y-5=0\end{matrix}$

41.2. $y^2-32x=0$ en el punto P(2,-8). Rta.: $\begin{matrix}2x+y+4=0\\x-2y-18=0\end{matrix}$

41.3. $x^2+y^2-6x+8y-25=0$ en el punto P(-2,1). Rta.: $\begin{matrix}x-y+3=0\\x+y+1=0\end{matrix}$

41.4. $y=\frac{2x+1}{3-x}$ en el punto P(2,5). Rta.: $\begin{matrix}7x-y-9=0\\x+7y-37=0\end{matrix}$

41.5. $(x^2+4)y=4x-x^3$ en el punto P(0,0). Rta.: $\begin{matrix}x-y=0\\x+y=0\end{matrix}$

42. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva que representa a cada una de las siguientes funciones, en las condiciones dadas:

42.1. $y=2x^2-x+5$ en el punto de abscisa igual a 2.

Rta.: $\begin{matrix}7x-y-3=0\\x+7y-79=0\end{matrix}$

42.2. $3x^2+4y^2-6x+8y-45=0$ en un punto donde la ordenada valga –2

Rta.: $3x-y-17=0$; $3x+y+11=0$
$x+3y+1=0$; $x-3y-3=0$

42.3. $y=x^3+x$ en los puntos donde la pendiente de la recta tangente es igual a 4.

Rta.: $4x-y-2=0$; $4x-y+2=0$
$x+4y-9=0$; $x+4y+9=0$

42.4. $y=-x^2+8x-12$ siendo la recta tangente perpendicular a la recta $y=-\frac{1}{2}x$

Rta.: $2x-y-3=0$
$x+2y-9=0$

42.5. $y^2=8x$ en el punto donde la abscisa distinta de cero, es el doble de la ordenada.

Rta.: $x-4y+32=0$
$4x+y-144=0$

CAPÍTULO 3: MISCELÁNEA II

43. Hallar los siguientes límites utilizando L'Hospital:

43.1. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$ Rta.: 1

43.2. $\lim_{x\to 0} x.cotg2x$ Rta.: $\frac{1}{2}$

43.3. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ Rta.: e^{-1}

43.4. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ Rta.: $\frac{1}{2}$

43.5. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ Rta.: e^a

43.6. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$ Rta.: 1

43.7. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$ Rta.: 1

43.8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(senx-cosx)^{tgx}$ Rta.: e^{-1}

43.9. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ Rta.: e

43.10. $\lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ Rta.: e^3

43.11. $\lim_{x\to 0} x^2.e^{\frac{1}{x^2}}$ Rta.: ∞

43.12. $\lim_{x\to a}\left(1-\frac{3x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$ Rta.: $e^{\frac{6}{\pi}}$

43.13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{senx-cosx}{1-tgx}$ Rta.: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

43.14. $\lim_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{tg\frac{\pi}{2}}$ Rta.: e^{-1}

43.15. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ Rta.: $e^{-\frac{1}{6}}$

43.16. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{cosx}$ Rta.: 1

43.17. $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{x-senx}$ Rta.: 3

43.18. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{cotg\,x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$ Rta.: -1

43.19. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cotg}x)^{sen\,x}$ Rta.: 1

43.20. $\lim_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$ Rta.: $e^{\frac{2}{\pi}}$

43.21. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ Rta.: 1

43.22. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ Rta.: $\sqrt{ab}$

43.23. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sec^2x-2tgx}{1+4cos4x}$ Rta.: $\frac{1}{2}$

43.24. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{senx}}{x^3}$ Rta.: $\frac{\ln a}{6}$

43.25. Aplicar el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x)=x^2$ y $\varphi(x)=x^3$ en el intervalo cerrado $[1\,,2]$ y calcular el valor de la abscisa del punto C.

44. Verificar las siguientes desigualdades utilizando el Teorema de Lagrange:

44.1. $arctg\ x < x$ para x positivo.

44.2. $e^x \geq 1+x$ para todo x.

44.3. $\ln(1+x) < x$ para x positivo.

45. En qué punto de la curva $y=\ln x$, la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos A(1,0) y B(e,1).

Rta.: En el punto donde x=e-1.

46. Comprobar que la fórmula de Lagrange es válida para la función $y=2x-x^2$ en el intervalo cerrado $[0,1]$.

47. ¿En qué punto de la curva $y = x^n$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(0,0)$ y $B(a, a^n)$?

Rta.: En el punto donde $c = \frac{a}{\sqrt[n-1]{n}}$

48. Comprobar que el Teorema de Rolle es válido para la función $y = x^3 + 5x^2 - 6x$ en el intervalo cerrado $[0; 1]$.

Rta.: Sí es aplicable.

49. Comprobar si el Teorema de Rolle es válido para la función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ en el intervalo cerrado $[-1; 1]$.

Rta.: No es aplicable.

50. Verificar que la longitud del segmento normal a la representación de la curva $y = f(x)$ en el punto $M(x_0,\ y_0)$ vale $\left|y_0\sqrt{1 + (y_0')^2}\right|$.

51. Verificar que la longitud del segmento subtangente a la representación de la curva $y = f(x)$ en el punto $M(x_0,\ y_0)$ vale $\left|\frac{y_0}{y_0'}\right|$.

52. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $\rho = 2sen3\theta$ en el punto donde $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Rta.: $x - 2y + 1 = 0$

53. ¿En cuánto aumenta, aproximadamente, el volumen de una esfera de 15 cm de radio si éste se alarga en 2 mm?

Rta.: Aumenta en 565,49 cm^3.

54. Un puente se encuentra a 10 metros sobre un canal. Un bote que va a 3 m/s pasa bajo el puente en el mismo momento en que un hombre que camina sobre el mismo a 2 m/s pasa por el centro del puente. ¿A qué velocidad se estarán separando el hombre y el bote 3 segundos después de haberse cruzado?

Rta.: $\frac{dD}{dt} = 2{,}65\ \frac{m}{s}$

55. A la medianoche, un barco sale del punto B hacia el sur a una velocidad de 20 Km/h. A las dos de la mañana siguiente, otro barco sale del punto A, que está situado a 200 Km al sur del punto B, hacia el este con una velocidad de 15 Km/h. Hallar la velocidad de variación de la distancia entre los barcos a las 3 de la mañana.

Rta.: $\frac{dD}{dt} = -18{,}29\ \frac{Km}{h}$

56. Utilizando el concepto de diferencial, calcular los valores aproximados de:

56.1. $\cos 61º$ — Rta.: 0,48489.

56.2. $tg\ 44º$ — Rta.: 0,96509.

56.3. $tg\ 45º\ 3'20''$ — Rta.: 1,00194.

CAPÍTULO 4: EXTREMOS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

1. Analizar y graficar las siguientes funciones; definiendo sus puntos críticos:

1.1. $y = -x^2 - 6x + 1$ — Rta.: M_{Rel}. (-3;10) convexa

1.2. $y = x^2 - 4x + 5$ — Rta.: m_{Rel}. (2;1) cóncava.

1.3. $y = x^3 - 3x^2$ — Rta.: M_{Rel}.: (0;0)
m_{Rel}.: (2;-4)
PI.:(1;-2)

1.4. $y = x^2 + \frac{2a^3}{x}$ — Rta.: mRel.: (a;3a2)

1.5. $y = \operatorname{tg} x - 4x$ en $[0, \pi]$ — Rta.: PI1.:(0;0)
PI_2.:($\pi; -2\,\pi$)

1.6. $y = x^{42} - 8x^2 + 5$ — Rta.: M_{Rel}.: (0;5)
m_{1Rel}.: (2;-11) y m_{2Rel}.: (-2;-11)
PI_1.:$(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{35}{9})$ y PI_2.:$(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{35}{9})$

1.7. $y = \frac{x}{1+x^2}$ — Rta.: M_{Rel}.: (1;0,5)
m_{Rel}.: (-1;-0,5)
PI_1.:$(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4})$, PI_2.:(0;0) y PI_3.:$(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4})$

1.8. $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$ — Rta.: M_{Rel}.: $(\frac{4a}{3}\ ;\ \frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\ a)$
m_{Rel}.: (0;0)
PI.:$(2a; 0)$

1.9. $y = 2e^x + e^{-x}$ — Rta.: mRel.:$(-\frac{\ln 2}{2}\ ; 2\sqrt{2})$

1.10. $y = \frac{x}{\ln x}$ — Rta.: mRel.: $(e; e)$

1.11. $y = \operatorname{sen} 2x - x$ en $[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ — Rta.: MRel.: $(\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6})$
m_{Rel}.: $(-\frac{\pi}{6}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6})$; PI.:$(0; 0)$

1.12. $y = 2x + \operatorname{arctg} x$ — No hay extremos.

1.13. $y = x \ln^2 x$ — No hay extremos.

1.14. $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ en $[0\ ; 2\pi]$ — Rta.: MRel.: $(\frac{\pi}{2}\ ; \frac{\pi}{2})$
m_{Rel}.: $(\frac{3\pi}{2}\ ; \frac{3\pi}{2})$
PI.:$(\pi; \pi)$

1.15. $y = 3 - 2\sqrt[3]{x+1}$ — No hay extremos.

2. ¿Dos números sumados dan 32. Que números son si su producto es el máximo posible?

Rta.: 16 y 16

3. ¿Cuándo es mínima la suma de un número y su recíproco?

Rta.: Si el número es $\sqrt[3]{2}$

4. Demostrar que todos los rectángulos de 32 cm de perímetro; el de mayor área es aquel cuyos lados miden todos 8 cm

5. Con una capa de hierro cuadrada de lado "l" se desea construir un caja sin tapa del mayor volumen posible. Sin que las caras se solapen. Cuál será el alto de la caja?

Rta.: $h = \frac{l}{6}$

6. Hallar la altura del cono de revolución de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio R.

Rta.: $h = \frac{4}{3}R$

7. Dala la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 6$; hallar los lados del rectángulo de mayor área que se puede inscribirse dentro del área limitada por la parábola y la recta.

Rta.: $l = 4\sqrt{2}\ \ y\ \ \ A = 4$

8. Inscribir en una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ el rectángulo de la mayor área posible.

Rta.: $D_{Base} = Altura$

9. Los márgenes verticales de una hoja son 1,5 cm y los horizontales de 1 cm. Que dimensiones debe tener la hoja para que su área sea mínima pero permita la impresión de una foto de 30 cm^2?

Rta.: $A = 3 + 3\sqrt{5}\ (cm)\ \ y\ \ \ a = 2 + 2\sqrt{5}\ (cm)$

10. ¿Cuál será la distancia mínima entre el punto P(5;1) y la parábola $y = -x^2$?

Rta.: $2\sqrt{5}\ u$

11. Se desea cercar un campo rectangular dividiéndolo en dos campos mediante una línea paralela a uno de los lados. Si solo se dispone de 300 m. de alambre tejido; que dimensiones máximas deberá tener el campo?

Rta.: $50x75\ m^2$

12. Que ancho superior debe tener un canal trapezoidal cuya base y lados tienen 10 cm y los laterales tienen igual inclinación para que su capacidad sea máxima?

Rta.: $20\ cm$

13. La resistencia de una viga de sección rectangular es directamente proporcional al ancho y al cubo de le altura. Hallar el ancho de la viga de máxima resistencia que podría obtenerse de un tronco de madera de 16 cm de diámetro.

Rta.: $h = 8\ cm$

14. Realizadas n mediciones de un magnitud x, se obtuvieron lecturas $x_1, x_2, \ldots\ x_n$. Demostrar que la suma de los cuadrados de los errores $\sum(x - x_i)^2$ será mínima si $x = \frac{x_1 + x_2 + \ \ldots\ \ x_n}{n}$

15. Dado un punto (x_0,y_0) del 1er cuadrante, hallar la recta que pasando por este punto forme con las direcciones positivas de los ejes un triangulo de área mínima.

Rta.: $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$

16. Hallar las asíntotas de la curvas siguientes:

16.1. $y=\frac{1}{(x+2)^3}$ — Rta.: $x=1 \quad y=0$

16.2. $y=e^{1/x}-1$ — Rta.: $x=0 \quad y=0$

16.3. $y^3=6x^2+x^3$ — Rta.: $y=2$

16.4. $y^3=a^3-x^3$ — Rta.: $x+y=0$

16.5. $y^2(x-2a)=x^3-a^3$ — Rta.: $x=2a \quad y=\pm(x+a)$

16.6. $y=e^{-2x}\operatorname{sen} x$ — Rta.: $y=0$

16.7. $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ — Rta.: $x=-1/2 \quad y=x+1/2$

16.8. $y=xe^{1/x^2}$ — Rta.: $x=0 \quad y=x$

16.9. $y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$ — Rta.: $x=b \quad y=c$

16.10. $x=\frac{2t}{1-t^2}$; $y=\frac{t}{1-t^2}$ — Rta.: $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

CAPÍTULO 4: MISCELÁNEA

17. Hallar los puntos de inflexión de:

17.1. $y=x^5$ — Rta.: PI $(0;0)$

17.2. $y=1-x^2$ — Rta.: No hay punto de inflexión

17.3. $y=x^3-3x^2-9x-9$ — Rta.: PI $(1;-1)$

17.4. $y=(x-b)^3$ — Rta.: PI $(b;0)$

17.5. $y=x^4-2$ — Rta.: No hay punto de inflexión

17.6. $y=\frac{1}{x^2-1}$ — Rta.: PI1 $(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{9}{10})$ PI2 $(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{9}{10})$

17.7. $y=\operatorname{tg} x$ en $[0,\pi]$ — Rta.: PI $(\frac{\pi}{2};0)$

17.8. $y=xe^{-x}$ — Rta.: PI $(2;2e^{-2})$

17.9. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$ — Rta.: PI $(2;a-\sqrt[3]{2-b})$

17.10. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$ Rta.: No hay punto de inflexión

18. Analizar y graficar las funciones:

18.1. $y = x + |x|$

18.2. $y = \frac{x^2}{2} - \ln x$

18.3. $y = \frac{1}{e^x - 1}$

18.4. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

18.5. $y = x \operatorname{arctg} x$

18.6. $y = \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$

18.7. $ay = (a^2 - 2x^2)x^2$ con $a > 0$

18.8. $y = x \ln x$

18.9. $y = \frac{x^2}{x-2}$

18.10. $x = t^2$; $y = \frac{t^6}{t^4 - 1}$

19. Hallar dos números tales que el segundo por el cuadrado del primero sea 500 y que 32 veces el producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del primero, sea mínimo.

Rta.: 20 y $5/4$

20. Hallar las dimensiones de un cono de volumen máximo, de modo que al ser seccionado por un corte que pasa por su vértice y por el centro de la base, el triangulo formado mida 30m de perímetro.

Rta.: $\mathrm{r_{base}} = 6\, m$ y $\mathrm{h} = 3\sqrt{5}\ \mathrm{m}$

21. En un paquete en forma de paralelepípedo recto tiene igual ancho que alto (x) y largo (y). Si su perímetro mas su longitud debe de ser como máximo 108 cms; Hallar sus dimensiones para que su volumen sea máximo.

Rta.: $18\mathrm{x}18\mathrm{x}36\ \mathrm{cm}^3$

22. Demostrar que el alcance de un proyectil lanzado con V_0 y ángulo α sobre la horizontal es máximo si $\alpha = 45°$

23. El costo de pedido y transporte C de los componentes usados en la fabricación de un producto es: $\mathrm{C} = 100\left(\frac{200}{\mathrm{x}^2} + \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}+30}\right)$ p/ $\mathrm{x} \geq 1$ siendo x el tamaño del pedido. Que pedido minimiza el costo?

Rta.: 404.500 unidades