FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ASUNCIÓN

CURSO PREPARATORIO DE INGENIERÍA

2014

CÁLCULO DIFERENCIAL

Capítulo 1

GUÍA DE ESTUDIOS

CÁLCULO PROPOSICIONAL:

Proposición es toda oración respecto de cuyo significado puede decirse que es verdadera (V) o falsa (F).

Una proposición se designará con una letra minúscula, por ejemplo p, q, etc.

A partir de una proposición simple pueden generarse otras, simples o compuestas.

Conectivos lógicos:

Conectivo	Operación	Significado
$\neg$	Negación	no p
$\wedge$	Conjunción	p y q
$\vee$	Disyunción	p o q
$\Rightarrow$	Implicación	p implica q
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	p si y sólo si q

Tablas de valores de verdad de operaciones proposicionales:

Negación. (Es una operación proposicional unaria)

P	$\neg$**p**
V	F
F	V

Conjunción.

p	**Q**	**p $\wedge$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción.

p	**Q**	**p $\vee$ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación o condicional.

p	Q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Obsérvese que $p \Rightarrow q$ es V en tres casos:

En uno solo de ellos, p es V. Así: SI $p \Rightarrow q$ es V, es suficiente (no necesario) que p sea V para que q lo sea. Se dice: “p es condición suficiente para q”.

Si p es F, nada puede afirmarse de q, pero, para que p sea V es necesario (no suficiente), que q lo sea. Se dice: “q es condición necesaria para p”.

Doble implicación o bicondicional.

P	Q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nótese $p \Leftrightarrow q$ es verdadero solo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Obs.: Si consideramos tabla siguiente

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Nótese que $(p \Leftrightarrow q) = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Se dice “p es condición necesaria y suficiente para q” y viceversa. Ambas proposiciones son equivalentes.

Leyes lógicas o tautologías

Ley	**Expresión**
Involución	$\neg(\neg p) \equiv p$
Idempotencia	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
Conmutatividad	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
Asociatividad	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributividad	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Implicaciones asociadas.

Al condicional $p \Rightarrow q$, llamado directo, donde p es el antecedente y q el consecuente, se le asocian:

$q \Rightarrow p$ Llamado recíproco.

$\neg p \Rightarrow \neg q$ Llamado contrario.

$\neg q \Rightarrow \neg p$ Recíproco del contrario, llamado contra recíproco.

Las cuatro implicaciones se dicen conjugadas, y cualquiera de ellas puede tomarse como directa.

Vinculación entre proposiciones conjugadas

$\mathbf{p \Rightarrow q}$	Proposiciones Recíprocas	$\mathbf{q \Rightarrow p}$
Proposiciones Contrarias	Proposiciones Contra Recíprocas	Proposiciones Contrarias
$\mathbf{\neg p \Rightarrow \neg q}$	Proposiciones Recíprocas	$\mathbf{\neg q \Rightarrow \neg p}$

Obs.: Si consideramos la tabla siguiente

p	**q**	**p⇒ q**	**¬q**	**¬p**	**¬q ⇒¬p**
V	V	**V**	F	F	V
V	F	**F**	V	F	F
F	V	**V**	F	V	V
F	F	**V**	V	V	V

Nótese que: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,

Asimismo :$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

Se tienen que las implicaciones contrarrecíprocas son equivalentes, es decir, si la implicación directa es V, también los es la contrarrecíproca.

Entonces, verificada que una implicación es V, nada puede afirmarse de la verdad de la recíproca o de la contraria.

Pero si son verdaderas una implicación y su recíproca o su contraria, son verdaderas las cuatro y las proposiciones antecedente y consecuente se dice que son equivalentes.

Un razonamiento es un par ordenado $(\{p_i\} ; q)$, siendo $\{p_i\}$ un conjunto finito de proposiciones, llamadas premisas y q una proposición, llamada conclusión, respecto de la cual se afirma que deriva de las premisas.

Un razonamiento es deductivo si y sólo si las premisas son evidencias de la verdad de la conclusión, es decir, si $p_1, p_2, ..., p_n$ son verdaderos, entonces q es verdadero.

Un razonamiento deductivo es válido si no es posible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.

Una regla de inferencia es un esquema válido de razonamiento, independiente de la veracidad o falsedad de las proposiciones componentes.

Un razonamiento deductivo es válido cuando el condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas, y el consecuente, que es la conclusión, es tautológico.

Observación: $\neg(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

Una función proposicional en una variable o indeterminada x, es toda oración en la que figura x como sujeto u objeto directo, y, se convierte en proposición para cada valor específico de x.

Ejemplo: Referido al conjunto de estudiantes que pretenden ingresar este año en una de las Facultades de la Universidad Nacional de Asunción (UNA), si se escribe:

P(x) : x pretende ingresar en la UNA

Para cada uno de quienes este año pretenden ingresar en la UNA, P(x) tiene valor V o F, es decir, para cada asignación dada a x el enunciado es una proposición.

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante cuantificación.

Asociado a x se introducen los símbolos:

$\forall x : P(x)$ Cuantificación universal

$\exists x \ / \ P(x)$ Cuantificación existencial

Deducir o demostrar una verdad es establecerla como consecuencia de otras anteriormente establecidas.

Retrocediendo en la cadena deductiva, se tiene un punto de partida constituido por verdades que no son posibles de deducir de otras más simples y cuya certeza debe admitirse, bien por su evidencia o por la validez de la doctrina que de ellas deriva.

Del mismo modo, como proposiciones admitidas sin demostración, existen conceptos primarios no definidos, ante la imposibilidad de referirlos a otros más simples.

Actualmente el desarrollo de la matemática es esencialmente abstracta y se realiza, en gran parte, como SISTEMAS AXIOMÁTICOS y el desarrollo racional se funda en:

Términos primitivos, consistentes en elementos, conjuntos y relaciones cuya naturaleza no queda especificada de antemano.

Axiomas, o propiedades que relacionan los términos primitivos y los define implícitamente.

Definiciones de los términos no primitivos.

Teoremas, es decir, propiedades que se deducen de los axiomas o verdades anteriormente establecidas.

TEORÍA DE CONJUNTOS.

Se consideran términos primitivos: conjunto y elemento.

Se considera una relación primitiva la pertenencia.

Dado un elemento x y un conjunto A, entonces $x \in A \vee x \notin A$.

Los conjuntos se denotarán con letras mayúsculas y se especifican los elementos con letras minúsculas, a menos que estos elementos sean también conjuntos.

La proposición **a∈A**, se lee "a pertenece a A" y su negación **a∉A**, "a no pertenece a A".

Se escriben:

A = {a, b, c}, para indicar que el conjunto A está constituido por los elementos **a**, **b** y **c**. En este caso, como se nombran todos los elementos, se dice que **A** está determinado por **extensión**.

A = {x / P(x)}, para indicar que el conjunto **A** está constituido por los elementos **x** que cumplen la propiedad **P**. Se lee "A es el conjunto formado por los elementos x, tales que P(x)". En este caso se dice que el conjunto está determinado por **comprensión**.

Designación usual de conjuntos de números

N = Conjunto de los números naturales.
Z = Conjunto de los números enteros.
Q = Conjunto de los números racionales.
R = Conjunto de los números reales.
C = Conjunto de los números complejos.

Observación: El conjunto de los números complejos se define como:

$$C = \{(a,b): a,b \in R\}$$

$$Con\ las\ operaciones: \begin{cases} Suma: & (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ \ y \\ Producto: & (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bc,ad+bc) \end{cases}$$

Conjunto universal o referencial **U** es el que contiene todos los elementos considerados en un estudio.

Conjunto vacío ∅ es el que no posee elemento alguno.

Si cada elemento de un conjunto **A** es un elemento de otro conjunto **B**, se dice que **A** es un subconjunto de **B**, que **A** está contenido e **B** o que **A** está incluido en **B** (simbolizado **A ⊂ B**), o también que **B** es un superconjunto de **A**, que **B** contiene a **A** o que **B** incluye a **A** (simbolizado **B ⊃ A**). La negación de esta proposición es **A ⊄ B** y significa que en **A** existe al menos un elemento que no pertenece a **B**.

Igualdad de conjuntos: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

Operaciones con conjuntos

Unión : $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$

Intersección : $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

Diferencia : $A \setminus B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

Complementación: $A' = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$

Observación: Son relaciones equivalentes

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$$

Leyes de las operaciones con conjuntos

Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Asociatividad	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributividad	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identidad	$A \cup \emptyset = A$; $A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap U = A$
Involución	$(A')' = A$	
Complementación	$A \cup A' = U$; $U' = \emptyset$	$A \cap A' = \emptyset$; $\emptyset' = U$
De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Conjunto producto de los conjuntos A y B, (en ese orden) es el conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) \,/\, a \in A \wedge b \in B\}$$

Nótese que $A \times B \neq B \times A$

RELACIONES BINARIAS

Relación binaria R, de A a B, es un subconjunto de $A \times B$. Si $(x, y) \in R$ se dice que x está relacionado con y.

El conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados que pertenecen a R se llama dominio de R y el conjunto de los segundos elementos imagen de R.

Relación inversa de R, es el subconjunto de $B \times A$, definido por:

$$R^{-1} = \{(y, x) \,/\, (x, y) \in R\}$$

Si B = A se dice que R es una relación en A, en este caso $R \subset A^2$.

Grafo o gráfico de las relaciones:

Ej.1: R = Sillas (S_i) ocupadas por alumnos (A_j)

Representación gráfica de relaciones:

Ej.: $y = -0{,}04x^2 + 2{,}2x + 2 \Rightarrow (-5, -10)$; $(10, 20)$; $(20, 30)$

Posibles propiedades de las relaciones definidas en un conjunto A.

Reflexividad:

R es reflexiva $\Leftrightarrow \forall a : a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$
R es no reflexiva $\Leftrightarrow \exists a \,/\, a \in A \wedge (a, a) \notin R$
R es arreflexiva $\Leftrightarrow \forall a : a \in A \Rightarrow (a, a) \notin R$

Simetría:

R es simétrica $\Leftrightarrow \forall a\ \forall b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
R es no simétrica $\Leftrightarrow \exists a\ \exists b \in A \,/\, (a, b) \in R \wedge (b, a) \notin R$
R es asimétrica $\Leftrightarrow \forall a\ \forall b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$

Transitividad:

R es transitiva $\Leftrightarrow$
$\forall a \forall b\ \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
R es no transitiva $\Leftrightarrow$
$\exists a \exists b\ \exists c \in A \,/\, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (a,c) \notin R$
R es atransitiva $\Leftrightarrow$
$\forall a \forall b\ \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$

Observaciones:

Se dice que R es antisimétrica $\Leftrightarrow$
$\forall a \forall b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

Si se designa con D a la diagonal de A^2, es decir:
$D \subset A^2 = \{(a, a) \,/\, a \in A\}$; se tienen que:
R es reflexiva $\Leftrightarrow D \cap R = D$
R es no reflexiva $\Leftrightarrow D \cap R \neq D$
R es arreflexiva $\Leftrightarrow D \cap R = \varnothing$

Relaciones de equivalencia:

Una relación definida en un conjunto se dice que es de equivalencia, si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplos:

a) En el conjunto de segmentos de rectas, la relación es igual a.
b) En el conjunto de triángulos, la relación es semejante a.
c) En el conjunto de polígonos, la relación es equivalente a.

Relaciones de orden:

Una relación definida en un conjunto se dice que es de orden y queda especificada con el término preceder. Es decir “a precede a b”, en símbolos $a < b$, significa $(a, b) \in R$.

Lo esencial de toda relación de orden es la transitividad, y según se cumplan o no otras propiedades se habla de orden amplio o estricto, y en cada caso de orden total o no.

R es de orden parcial en A si y sólo si, R es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, si para a, b, c $\in A$, se tiene:

a) $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$;
b) $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$;
c) $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Además, se dice que es de orden total si y sólo si todo par de elementos de A son comparables, es decir: $\forall a\ \forall b : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Ejemplos:

a) En el conjunto de segmentos de rectas, la relación es menor o igual a.
b) En el conjunto de números enteros, la relaciónes múltiplo de.
c) Entre conjuntos de elementos cualesquiera, la relación es subconjunto de.

R es de orden estricto en A si y sólo si, R es arreflexiva, asimétrica y transitiva, es decir, si para a, b, c $\in A$, se tiene:

a) $a \in A \Rightarrow (a, a) \notin R$;
b) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$
c) $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

Además, se dice que es de orden total si y sólo si todo par de elementos de A son comparables, es decir: $\forall\ a \neq b : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$

Ejemplos:

a) En el conjunto de ángulos, la relación es mayorque.
b) En un conjunto de personas, la relación tiene menor edad que.
c) Entre conjuntos, la relación es subconjunto propio de.

Elementos distinguidos en un conjunto ordenado.

a)Primer elemento:

$a \in A$ es el primer elemento $\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow a < x$

b)Último elemento:

$b \in A$ es el último elemento $\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x < b$

c) Elementos consecutivos en un conjunto ordenado:

$b, a \in A$ son consecutivos $\Leftrightarrow a < b \wedge a < x < b \Rightarrow a = x \vee b = x$

FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

Definición: f es una función de A en B si y sólo si f es una relación entre A y B, tal que todo elemento de A tiene un único correspondiente en B.

Las funciones se indican usualmente con f, g, h, etc. y para denotar que f es una función de A en B, se escribe:

$f : A \to B$

Se lee f es una función o aplicación de A en B. A es el dominio, B elcodominio y f(A) es la imagen de la función.Nótese que $f(A) \subseteq B$

En símbolos:

$f : A \to B \Leftrightarrow$

a) $\forall a \in A, \exists b \in B \,/\, (a, b) \in f$

b) $(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow c = b$

Si $(a, b) \in f$ se dice que b es el correspondiente o la imagen de a por f, y se escribe b = f(a). Se dice también que a es la preimagen por f de b.

Lo mismo que las relaciones, las funciones pueden representarse gráficamente mediante un sistema de coordenadas.

Clasificación:
La función $f : A \to B$ puede ser:

a) Inyectiva: Si elementos distintos de A tienen imágenes distintas en B, en símbolos:
$a,b \in A \wedge a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, o equivalentemente: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

b) Sobreyectiva: Si todo elemento de B tiene preimagen en A, en símbolos:
$\forall b \in B \exists a \in A \,/\, (a, b) \in f$

c) Biyectiva: Si es a la vez inyectiva y sobreyectiva. En este caso $\exists f^{-1}$ tal que $f^{-1}: B \to A$, definida como $a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$, es decir, la inversa de una función f es una función si y sólo f es biyectiva.

Además, una función puede su presentarseen forma tabular, gráfica o mediante una expresión matemática.
Una función *f* dada mediante una expresión matemática, puede clasificarse en:

a) **Algebraica** si en f, la variable x, sólo se presenta con operaciones algebraicas, es decir sumas o productos y se denomina:

Racional si la variable x está afectada sólo de exponentes enteros. Puede ser:

Entera: si los exponentes de x son solo positivos, es decir x no figura como denominador en la expresión;

Fraccionaria:si algún exponente de x es negativo, o sea figura como denominador en la expresión.

Irracional si la variable x está afectada de exponentes fraccionarios.

c) **Trascendente** si la variable se presenta no sólo con operaciones algebraicas. Las funciones trascendentes, llamadas elementales, que se presentarán con frecuencia en este estudio son:

Exponencial: $y = a^x$, donde $a>0 \wedge a\neq 1$

Logarítmica: $y = \log_b(x)$

Es una de las inversas de la exponencial, es decir equivale a $x = b^y$, donde b es la base del sistema de logaritmos utilizado)

Trigonométricas o circulares:

$y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$; $y = \tan(x)$; $y = \text{cotan}(x)$; $y = \sec(x)$; $y = \text{cosec}(x)$.

Trigonométricas inversas o ciclométricas:

$y = \sin^{-1}(x)$, $y = \cos^{-1}(x)$; $y = \tan^{-1}(x)$; $y = \text{cotan}^{-1}(x)$; $y = \sec^{-1}(x)$; $y = \text{cosec}^{-1}(x)$.

También simbolizadas como $y = \arcsin(x)$, $y = \arccos(x)$, etc.

Observación:

Un intervalo real *I* es el conjunto de números reales x, definido como:

$I = \{ x : x \in R \wedge x > a \wedge x < b \}$, se simboliza (a, b) y se designa intervalo abierto.

$I = \{ x : x \in R \wedge x \geq a \wedge x \leq b \}$, se simboliza [a, b] y se designa intervalo cerrado.

$I = \{ x : x \in R \wedge x > a \wedge x \leq b \}$, se simboliza (a, b] y se designa intervalo abierto-cerrado.

$I = \{ x : x \in R \wedge x \geq a \wedge x < b \}$, se simboliza [a, b) y se designa intervalo cerrado-abierto.

Así: $R = (-\infty, +\infty)$; $R^+ = (0, +\infty)$; $R^- = (-\infty, 0)$; y $R_0^+ = R^+\cup\{0\} = [0, +\infty)$ y $R_0^- = R^-\cup\{0\} = (-\infty, 0]$.

Si una función *f* está definida en un intervalo simétrico, es decir $f : D \to R$, donde $D = \{x: -a < x < a \}$ puede clasificarse en:

a) **Par o simétrica** si $f(-x) = f(x)$

b) **Impar o antisimétrica** si $f(-x) = -f(x)$

Obsérvese que toda función, definida en un intervalo simétrico, puede escribirse como la suma de una función par y otra impar, haciendo: $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Una función real de variable real, se dice periódica, de período T si $\exists T \in R$ tal que $f(x + T) = f(x)$. Donde T es el período de la función. Obsérvese que si f es periódica de período T, también es periódica de período 2T, 3T, etc. Se denomina período fundamental al menor valor posible de T.

Una función real de variable real, se dice que:

Estáacotadasuperiormente si $\exists M \in R \wedge \forall x \in Dom(f)$ se verifica $f(x) \leq M$, donde *M* es una cota superior.

Está acotada inferiormente si $\exists m \in R \wedge \forall x \in Dom(f)\ se\ verifica\ f(x) \geq m$ donde *m* es una cota inferior.

Su máximo absoluto es la menor de sus cotas superiores y su mínimo absoluto es la mayor de sus cotas inferiores.

Es monótona creciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in Dom(f)$.

Es monótona estrictamente crecientesi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in Dom(f)$.

Es monótona decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in Dom(f)$

Es monótona estrictamente decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\ \forall x_1, x_2 \in Dom(f)$

Es acotada, es monótona creciente o decreciente, en un intervalo $a < x < b$ (puede ser cerrado en ambos o en uno de los extremos) si las condiciones enunciadas se verifican en dicho intervalo.

Está definida a trozos, seccionalmente o por partes si *h* está definida por expresiones matemáticas distintas en intervalos no superpuestos distintos, es decir $h(x)= f(x)\ \forall x\in[a, b] \wedge h(x)= g(x)\ \forall x\in[c, d]$; etc.

Operaciones con funciones reales de variables reales:

Suma de dos funcionesf: $I_1\to R$ y $g : I_2\to R$ es la función $h = f + g: I \to R$ definida como $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y cuyo dominio es $I = I_1\cap I_2$.

Producto de una funciónf : $I\to R$ por un número real k es la funciónkf: $I\to R$, definida como: $(kf)(x) = kf(x)$

Producto de dos funcionesf: $I_1\to R$ y $g : I_2\to R$ es la función $h = f.g\ I \to R$, definida como $h(x) = f(x)\cdot g(x) = f(x)\, g(x)$ y cuyo dominio es $I = I_1\cap I_2$.

Cociente de dos funcionesf: $I_1\to R$ y $g : I_2\to R$ es la función $h = f/g\ I \to R$, definida como $h(x) = f(x)/g(x) = f(x)/g(x)$ y cuyo dominio es $I = I_1\cap I_2 \backslash A$, siendo$A = \{ x: x\in I \wedge g(x) =0 \}$.

Composición de dos funciones $f : I_1\to I_2$ y $g : I_2\to I_3$ es la función $h= g^\circ f : I_1\to I_4$definida como: $h(x) = (g^\circ f)(x) = g(f(x))$ e $I_4 = \{ z : z\in I_3 \wedge \exists y=f(x)\in I_2 \wedge z=g(y) \}$.

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

i) $f + g = g + f$. (Conmutatividad)
ii) $(kf)(x) = kf(x)$.
iii) $fg=gf$. (conmutatividad)
iv) $f(g+h) = \cdot fg+ fh$. (Distributividad)
v) $f\circ g\neq g\circ f$. (no conmutatividad)
vi) $f\circ(g+h) = \cdot f\circ g+ f\circ h$. (Distributividad)
vii) $f\circ(g\circ h) = (f\circ g\ )\circ h$ (Asociatividad)

Ejemplos de algunas funciones reales de variables reales, en coordenadas cartesianas. (*f* : *D*→*R*). Dominio *Dom*(*f*) = *D*⊂*R*, imagen *Im*(*f*)= *I*⊂*R*y sus gráficas.

a) Función constante: $y = c$ (Caso particular: función nula: $y = 0$)

b) Función identidad:$y = x$

c) Función signo de x: $sig(x) = \begin{cases} -1 & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

d) Funciones de redondeo.

i) Redondeo (round): $y = round(x) = [x] = enteromáspróximoax.$
$(Encasosdeequidistanciaseredondeaalparmáspróximo)$

ii) Redondeo por defecto (floor) o función piso: $y = floor(x) = \lfloor x \rfloor$
$\lfloor x \rfloor = n\ \ si\ \ n \leq x < n + 1;\ (n \in Z)$
$(mayor\ entero\ que\ no\ excede\ a\ x)$

iii) Redondeo por exceso (ceiling) o función techo:$y = ceiling(x) = \lceil x \rceil$
$\lceil x \rceil = n + 1 sin < x \leq n + 1;\ (n \in Z)$
$(menorenteroquenoesmenorquex)$

d) Función resto (mod):
$y = x\ mod(k) = resíduo\ de\ la\ divisíon\ entera\ de\ x\ por\ k \in N.$
$Observación:\ y = x\ mod(k) = x - k * floor\left(\frac{x}{k}\right)$

e) Función factorial, de un número entero:
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = producto\ de\ los\ enteros\ positivos\ de\ 1\ a\ n$

f) Función potencial: $y = x^n = x\ nveces\ como\ factor\ si\ n \in N.$

g) Funciones trigonométricas.$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\csc(x)$

h) Funciones trigonométricas inversas:$\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$, $\cot^{-1}(x)$, $\sec^{-1}(x)$, $\csc^{-1}(x)$

i) Función exponencial:$y = a^x$.

j) Funciones hiperbólicas.$\sinh(x)$, $\cosh(x)$, $\tanh(x)$, $\coth(x)$, $\mathrm{sech}(x)$, $\mathrm{csch}(x)$

k) Funciones hiperbólicas inversas. $\sinh^{-1}(x)$, $\cosh^{-1}(x)$, $\tanh^{-1}(x)$, $\coth^{-1}(x)$, $\mathrm{sech}^{-1}(x)$, $\mathrm{csch}^{-1}(x)$

l) Función valor absoluto:$y = abs(x) = |x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

m) Función del conjunto de los números enteros en los reales (sucesión):
$y = f(\mathrm{n})$, es decir $f: N \to R$.

Ejemplos de algunas funciones reales de variables reales, en coordenadas polares. *f* : *D*→*R*). Dominio *Dom*(*f*) = *D*⊂*R*, imagen *Im*(*f*)= *I*⊂*R* y sus gráficas.

i) Circunferencia de centro en $(0,0)$ y radio a:$\rho = a$
ii) Circunferencia que pasa por $(0,0)$y de centro en (a, α): $\rho = 2a\cos(\theta - \alpha)$
iii) Espiral de Arquímedes: $\rho = a\theta$
iv) Caracol de Pascal: $\rho = b + a\cos\theta$ (Considerar: $b > a$; $b = a$; $b < a$)
v) Rosa de tres pétalos: $\rho = \cos 3\theta$

Ejemplos de algunas funciones reales de variables reales, en forma paramétrica. *x* : *A*→*R;* Dominio de x *Dom*(*x*) = *A*⊂*R*, imagen de x *Im*(*x*)= *I*⊂*R* ;*B*→*R;* Dominio de y *Dom*(*y*) = *B*⊂*R*, imagen de y *Im*(*y*)= *J*⊂*R* y sus gráficas.

i) Circunferencia: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

ii) Elipse: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

iii) Hipérbola: $\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\tan t \end{cases}$

Ejemplos de algunas funciones reales de variables reales, en forma implícita, *f* :*D*→*R* es dada como: $F(x, y) = 0$y sus gráficas.

i) $3x + 5y + 3 = 0$. (Recta)

ii) $2x^2 - 3y + 10 = 0$ (Parábola de segundo grado)