FIUNA
CALCULO 2
TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

1. Hallar los extremos relativos y absolutos de las funciones sobre las regiones indicadas
   a) $f(x,y) = (1-x)(1-2x)(1-y)(1-2y)$ en $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$
   b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ en $x^2 + y^2 \le 2$
   c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ en $y - x^2 + 1 \ge 0, \quad y + x^2 - 1 \le 0$

2. Un contenedor tiene forma de paralelepípedo rectangular, y debe tener un volumen de 240 m^2 . El material de las bases es más grueso y cuesta 10 $ el metro cuadrado; en cambio el material de las caras laterales cuesta sólo 6 $ el metro cuadrado. Determinar sus dimensiones, para que el costo sea mínimo

3. Hallar el punto del paraboloide $4z = 4(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 20$ más próximo al plano $x + y + z = 0$.

4. Calcular las siguientes integrales:

   $a) \iint_R \left(x.seny - y.e^x\right) dx\, dy$,siendo R el rectángulo determinado por $-1 \le x \le 1; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$

   $b) \iint_D (x.y)^2\, dx\, dy$ siendo $D = \left\{(x;y) \in \Re^2; \begin{array}{c} xy < 1, y > 0 \\ (x-y)(x-2y) < 0 \end{array}\right\}$

   $c) \iint_D x(y-4)\, dx\, dy$ donde $D = \{(x;y);\, x \ge 0, y \ge 0,\, 2x + y \le 4\}$

   $d) \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\, dx\, dy$ siendo $D = \{(x;y);\, x \ge 0, y \ge 0,\, x + y \le 1\}$

   $e) \iint_D x\, y\, dx\, dy$ donde D es la región del primer cuadrante limitada por las curvas

   $$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9,\ x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = \frac{9}{4}$$

   $f) \iint_D (x+y)\, dx\, dy$ *siendo* $D = \{(x;y);\, x^2 + y^2 \le x + y\}$

5. Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y^2 = 4ax \quad ; \quad x + y = 3a \quad ; \quad y = 0$

6. Calcular el área de un lazo de la curva $\rho = asen2\theta$

7. Calcular del área de la región comprendida por las curvas $\rho \ge 2,\ \rho \le 2(1 + \cos\theta)$ e interior al primer cuadrante.

8. Calcular el área de la superficie $x^2+y^2+z^2=4z$ dentro del paraboloide $x^2+y^2=z$

9. Calcular el área de la superficie del cono $x^2+y^2=z^2$, cortada por el cilindro $x^2+y^2=2ax$

10. Calcular el área de la porción de superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ situada por encima del plano $z=0$ y limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2ax$

11. Hallar las coordenadas del centro de gravedad del área limitada por un lazo de la curva $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$. Determine también el momento de inercia respecto al polo

12. Calcular el volumen y las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo limitado por una esfera de radio **a** y una superficie cónica de ángulo en el vértice **2**α, si el vértice del cono coincide con el centro de la esfera

13. Calcular las coordenadas del centro de masa y el momento de inercia de un cono circular respecto a un diámetro de su base, exprese los resultados en función de h y r (altura y radio del cono)

14. Hallar el momento de inercia del sólido limitado por las superficies y de densidad δ dadas, respecto al eje dado:
    a) $x=0$; $y=0$; $z=0$; $x+z=a$; $y=z$; $\delta=kx$, respecto a OX
    b) $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x^2+y^2+z^2=b^2$; $\delta=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; respecto a OZ (a < b)
    c) $y^2+z^2=9$; $x=0$; $y=3x$; $z=0$ en el primer octante; $\delta=x^2+y^2$ respecto al eje OZ

15. Hallar el centro de masa del sólido que tiene la densidad dada y que esta limitado por las superficies descritas.
    a) $x=0$; $y=0$; $z=0$; $x+z=a$; $y=z$; $\delta=kx$
    b) $z^2=y^2+x^2$; $x^2+y^2=2ax$; $\delta=k(x^2+y^2)$

16. Calcular las siguientes integrales triples:
    a) $\iiint\limits_V (4x-y+z)\,dx\,dy\,dz$ donde V es el sólido limitado por las superficies $x=0$; $y=0$; $z=0$; $x+y=1$; $z=2-x^2$
    b) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ donde V está limitado por $2z=x^2+y^2$; $z=2$
    c) $\iiint\limits_V \sqrt{2-x^2-y^2}\,dx\,dy\,dz$ donde V es el sólido interceptado por $x^2+y^2+z=4$ y $z^2=2(x^2+y^2)$ y situado en el semiespacio $z>0$.

d) $\iiint_V \left(2zx^2 + 2zy^2\right) dx\, dy\, dz$ siendo V el volumen exterior a la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, con $z \geq 0$.

17. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 3\left(x^2 + y^2\right)$, $z = 1$, $z = 3$

18. Un sólido está limitado por las superficies $z = x^2 - y^2$, el plano $z = 0$, y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Calcular su volumen.

19. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $z = 0$; $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$

20. Calcular el volumen del cuerpo limitado por los planos coordenados, el plano $2x + 3y - 12 = 0$ *y el cilindro* $z = \frac{1}{2} y^2$

21. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$; $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $z = 0$

22. Siendo $\vec{F} = P(x,y,z)\mathrm{i} + Q(x,y,z)\mathrm{j} + R(x,y,z)\mathrm{k}$ y $\vec{G} = L(x,y,z)\mathrm{i} + M(x,y,z)\mathrm{j} + N(x,y,z)\mathrm{k}$ Demostrar que $div(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \vec{G} \cdot rot\vec{F} - \vec{F} \cdot rot\vec{G}$

23. Determinar cuales de estos campos de fuerzas son o no conservativos y, en caso de serlo, hallar su función potencial.

a) $\vec{F} = (y \cos xy + 1/x\ )\vec{i} + x \cos xy\vec{j} + 1/z\ \vec{k}$

b) $\vec{F} = (y^2 - x^2\ )\vec{i} + xy\vec{j}$

c) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}$

24. Probar que para todo versor $\vec{T}$, se cumple $(\vec{T} \cdot \nabla)\vec{T} = -\vec{T} \wedge rot\vec{T}$

25. Demostrar $\left(\vec{A} \cdot \nabla\right)\phi = \vec{A} \cdot \nabla\phi$

26. Demostrar $\left(\phi\ \vec{A}\right)\nabla \wedge \left(\phi\ \vec{A}\right) = (\nabla\ \phi) \wedge \vec{A} + \phi\ (\nabla \wedge \vec{A})$

27. Si $\vec{A}$ es un vector constante, probar la identidad $\vec{A}\left[grad\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) - rot\left(\vec{B} \wedge \vec{A}\right)\right] = div\vec{B}$